時空カオスにおける相関カスケードのウェーブレット解析 *

中尾 裕也　(理化学研究所 脳科学総合研究センター)
〒 *351-0198* 埼玉県和光市広沢 *2-1* (nakao@mns.brain.riken.go.jp)

強く相互作用する多体系は自然界に**遍在**するが、その複雑な力学過程をどう捉えて記述するかという問題は、長い間議論の対象となってきており、また自然科学が現時点で直面しているものでもある。その中で、発達した流体乱流におけるリチャードソンのカスケード描像を、強く相互作用する多体系の本質を捉えた成功例のひとつとして挙げることができよう。つまり大きな渦が徐々に小さな渦に分解され、最終的に粘性によって散逸されるという描像である。間欠性の難しい問題を別にすれば、この描像はコルモゴロフの 1941 年の理論によって数学的な記述を与えられ、有名なエネルギースペクトルの $-5/3$ 乗則を導いた。これは、運良く流体乱流においては、多数のモードの複雑な非線形ダイナミクスの結果、空間 (あるいは時間／エネルギー) スケールにおける単純な階層構造が形成されていることによる。流体乱流での成功以来、エネルギー、あるいはより一般に、情報や因果関係が異なるスケールの事象間を流れるという描像に基づいて多体系の挙動を捉えようという試みが、いくつかの系についてなされてきた。

さて、種々の現象の空間–スケールにおける性質を解析する上で、ウェーブレット変換はその空間とスケールの両方における局在性から有用な道具であることが期待され、たくさんの応用が試みられてきた。この研究では、空間的に広がった場の時空スケール相関のウェーブレットを用いた簡単な解析方法を提案し、それをスケーリング則を示す典型的な時空カオス系に対して適用する。

以下では時空カオス系として非局所的に結合した複素ギンツブルクランダウ (**CGL**) 振動子系を扱う。通常の拡散結合した CGL 振動子系とは異なり、この系はフラクタル的な空間パターンを示す。非局所結合 CGL 方程式は

$$\dot{W}(x,t) = W - (1+ic_2)|W|^2 W \\ +K(1+ic_1)\int dx' g(|x'-x|)\left[W(x',t)-W(x,t)\right]$$

で与えられ、蔵本によって最初に導入された。各振動子は、拡散的な相互作用のかわりに、距離 $|x|$ の減少関数である重み $g(|x|)$ によって平均された他の振動子の非局所平均場を感じて運動する。重みとしては $g(|x|) = g_0 \exp(-|x|/\gamma)$ という形のものを用い、非局所結合距離は γ である。以下これを **NCGL** と呼ぶ。図 1 に NCGL の振幅パターンとパワースペクトルを示す。振幅パターンはフラクタル的で、パワースペクトルはベキ的な減衰を示す。このように、NCGL は通常の拡散結合 CGL 方程式とは相互作用が違うだけだが、種々の統計量が特異なスケーリング則を示す。

さて、パワースペクトルのベキ的な挙動は、流体乱流におけるエネルギースペクトルの $-5/3$ 乗則を思い出させる。(ただし、NCGL 方程式においてはベキの指数が結合強度 K とともに変化する。) 流体乱流においては、エネルギースペクトルのベキ的な挙動は渦の崩壊のカスケード過程に関連づけられている。そこで我々はナイーブに、NCGL にも何らかのカスケード過程が内在しているのではないかと予想することにする。もちろん NCGL にはエネルギーやエンストロフィーのような保存量は存在しない。しかし、なお、因果関係や情報、あるいは単に相関と呼んでもよいが、何らかの量の長波長から短波長へのカスケードを期待してもよかろう。以下、そのようなカスケード過程が実際に存在することを示すために、スケール間の揺らぎの時空相関を解析する方法を議論する。

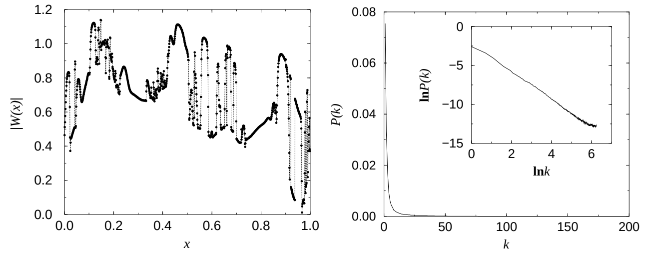

図 1. (左)NCGL の振幅場のスナップショット. (右)NCGL の振幅場のパワースペクトル. 挿入図は両対数プロット.

異なる時刻の空間パターンをスケール毎に分解して、その成分間の時間相関を調べることを考えよう。正規直交ウェーブレット基底を使って空間パターン $V(x)$ を展開する:

$$V(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j,k}\psi_{j,k}(x).$$

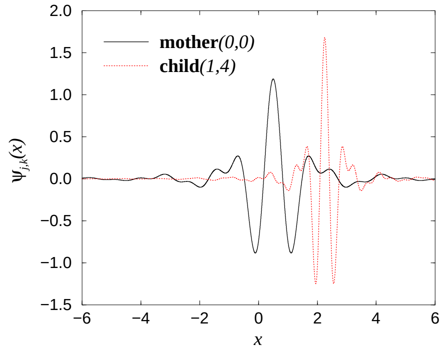

図 2. Meyer のウェーブレット ; 母とひとつの子.

ここで $a_{j,k}$ は展開係数で、$\psi_{j,k}(\underline{x})$ は母ウェーブレット $\psi(x)$ から並進と縮小 $\psi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j}\psi(2^j x - k)$ により作られた子ウェーブレットである。子ウェーブレット $\psi_{j,k}(x)$

[0*] 当初予定していた発表内容は「結合素子系の時空カオスのリアプノフベクトル」であったが都合により変更した。この発表の詳しい内容は Int. J. Bif. Chaos **11** (2001) 1483 に出版された.

は空間とスケールの両方で、位置 $k/2^j$、スケール $1/2^j$ にだいたい局在しているので、

$$a_{j,k} = \langle V, \psi_{j,k}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V(x')\psi^*_{j,k}(x')dx'$$

で与えられる展開係数は、その空間–スケールにおける点の近傍の $V(x)$ の揺らぎを定量化する。得られたウェーブレット展開係数 $a_{j,k}$ から、粗視化された場 $b_j(x)$ $(0 \le x < 1)$ を $b_j(x) = \log|a_{j,k}|^2$ で新たに定義しておく。なお、ここでは Meyer のウェーブレット (図 2) を使用する。

$V_1(x)$ をある時刻 t での系の振幅パターン、すなわち $V_1(x) = |W(x,t)|$ とし、$V_2(x)$ を $V_1(x)$ が Δt だけ時間発展した振幅パターン、つまり $V_2(x) = |W(x, t + \Delta t)|$ としよう。これらの振幅パターンから得た展開係数より、粗視化された場 $b^1_{j_1}(x)$ と $b^2_{j_2}(x)$ が得られる。次に、これらの場 $b^1_{j_1}(x)$ と $b^2_{j_2}(x)$ の平均からの揺らぎを $\Delta b^1_{j_1}(x)$ と $\Delta b^2_{j_2}(x)$ として、一種の相互相関行列 $C_{j_1,j_2}(\Delta t)$ を

$$C_{j_1,j_2}(\Delta t) = \frac{\overline{(\Delta b^1_{j_1},\ \Delta b^2_{j_2})}}{\left[\ \overline{(\Delta b^1_{j_1},\ \Delta b^1_{j_1})}\ \overline{(\Delta b^2_{j_2},\ \Delta b^2_{j_2})}\ \right]^{1/2}}$$

と定義しよう。$(,)$ は空間での内積、上線は時間平均をとることを表す。明らかに $C_{j_1,j_2}(\Delta t) = C_{j_2,j_1}(-\Delta t)$ が成立する。図 3 にこの状況を図示した。

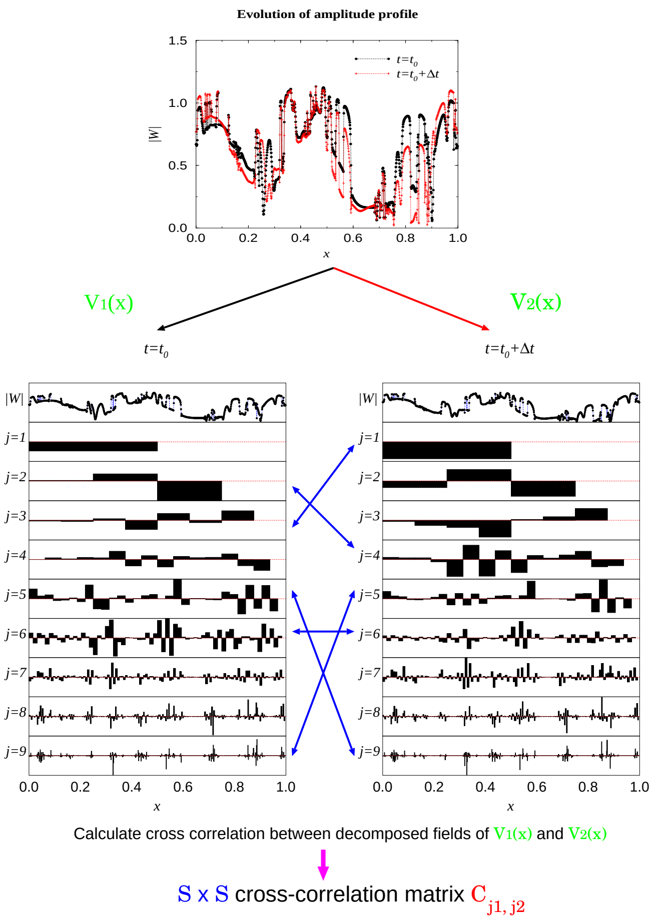

図 3. 各スケールの成分間の時間相関関数.

さて、$\Delta t = 0$ なら $V_1(x)$ と $V_2(x)$ は同じものであり、揺らぎ $\Delta b^1_{j_1}(x)$ と $\Delta b^2_{j_2}(x)$ も同一なので、C_{j_1,j_2} は単なる対称行列となる。一方、$\Delta t \neq 0$ では $V_1(x)$ と $V_2(x)$ は Δt に応じて異なるので、C_{j_1,j_2} はもはや対称ではなく、その非対称性が振幅パターンのスケール間相関の変動を特徴づけることが予想される。そのために、行列 C_{j_1,j_2} をさらに対称部分と反対称部分に分解しよう:

$$D_{j_1,j_2}(\Delta t) = \frac{1}{2}\left\{C_{j_1,j_2}(\Delta t) + C_{j_2,j_1}(\Delta t)\right\},$$
$$E_{j_1,j_2}(\Delta t) = C_{j_1,j_2}(\Delta t) - C_{j_2,j_1}(\Delta t). \tag{1}$$

対称部分 D_{j_1,j_2} は時間反転変換 $\Delta t \leftrightarrow -\Delta t$ について不変であるのに対し、反対称部分 E_{j_1,j_2} は不変ではない (反対称である)。よって、行列 E_{j_1,j_2} が時間反転について対称でない時空スケール相関、つまり何らかの情報あるいは相関のスケール間の流れの計量を与えることが期待できる。

結合距離より小さなスケールについて、隣接するふたつのスケール j と $j+1$ の間の相関の反対称成分 $E_{j,j+1}$ の時間差 Δt に対する変化を各スケールでの最大値で規格化したものを、図 4 に示す。時間変動の様子にスケールに対応した明確な時間順序が見られ、長波長 (小さな j) の事象間の相関は比較的早く立ち上がり、短時間で減衰する一方で、短波長 (大きな j) の事象間の相関は遅れて立ち上がり、減衰にはより長い時間がかかることが分かる。さらに、各空間スケール j 毎に時間差を適当にリスケールすると各カーブが重なることから、NCGL における揺らぎのスケール間の伝達には、自己相似性があることが分かる。このことは場のフラクタル性に関する直観と矛盾しない。

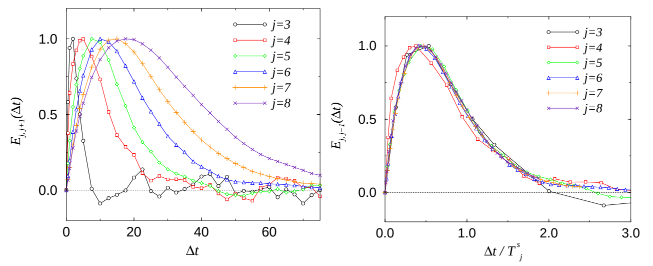

図 4. (左)NCGL の最大値で規格化した連続するふたつのスケール j と $j+1$ の間の相関行列の反対称成分 $E_{j,j+1}$. (右) スケール毎に時間差をリスケールしたもの.

以上の結果から、我々の簡単な相関行列による方法は時空カオス系の力学過程の時空スケール相関をうまく捉えられるものと考えられる。特にスケーリング則を示す非局所結合 CGL 系については、揺らぎの相関の長波長から短波長へのカスケード的な伝播があることを示した。

[1] Frisch, U. [1995] *Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge).

[2] Kuramoto, Y. [1995] “Scaling behavior of turbulent oscillators with non-local interaction”, Prog. Theor. Phys. **94**, 321-330.

[3] Mallat, S. [1999] *A Wavelet Tour of Signal Processing* (Academic Press, San Diego).