ランダムな外部インパルスによる非線形振動子の同期現象

Synchrony of Nonlinear Oscillators Induced by Random External Impulses

中尾 裕也 *, 新井 賢亮 (京都大・理)

Hiroya NAKAO* & Kensuke ARAI, Kyoto University

*FAX: 075-753-3742　E-mail: nakao@ton.scphys.kyoto-u.ac.jp

ランダムな外部インパルスによって結合していない非線形振動子間に誘起される同期現象を解析する。振動子のダイナミクスを位相縮約して、位相方向への摂動に対する安定性を議論することにより、非線形振動子に弱いインパルスを低頻度で与えた場合、常に同期現象が生じることを一般的に示す。

1　背景

相互作用する複数の非線形振動子が同期することは、古くからよく知られている [1, 2]。近年、振動子間に直接の結合がなくても、それらが共通の変動外力に駆動される場合、やはり同期現象を示すことが注目され、そのメカニズムが議論されている [4, 5, 6]。例えば、ラットの皮質神経細胞を用いた電気生理実験において、単一の神経細胞に定常電流を入力した場合には、実験の試行毎に異なるスパイク時系列が観測されるが、変動する電流の時系列を繰り返し与えた場合、毎回ほぼ同一のスパイク時系列が観測されることが知られている [3]。この現象は、共通変動外力に誘起された非線形振動子間の同期現象と捉えることができる。

これまでに、寺前&田中 [4] の研究で、非線形振動子の位相縮約理論 [1, 2] を用いて、共通の弱い白色 Gauss 変動外力を受けた複数の非線形振動子は、その詳細によらず、常に同期することが示されている。また、我々の研究でも [5, 6]、非線形振動子が共通のランダム電信信号やインパルス信号を受けた状況を考察し、やはり一般的な条件下で、振動子の詳細によらず同期現象が生じることを示している。

本稿では、変動外力が Poisson 過程に従うランダムなインパルスで与えられる場合について、Poisson 駆動 Markov 過程と位相縮約の理論を用いた解析により、低頻度の弱いインパルスが与えられた場合、振動子間に一般に同期現象が生じることを、神経細胞のモデルを例として解説する。

2　ランダムな外部インパルスによる同期現象

まず、神経細胞の発火活動の標準的なモデルである Hodgkin-Huxley(HH) モデルを用いたシミュレーションを例として示す。HH モデルは膜電位を表す変数 V と、Na および K イオンチャンネルの活性を表す変数 m, h, n からなる 4 変数の力学系で、入力電流パラメータを適当な一定値にとると、神経細胞の周期的なスパイク発火に対応するリミットサイクル解を示す。膜電位 V は以下の方程式に従う：

$$C\dot{V}(t) = G_{Na}m^3h(E_{Na} - V) + G_K n^4(E_K - V) + G_L(V_{rest} - V) + I(t) \quad (1)$$

ここで C, $G_{Na,K,L}$, $E_{Na,K}$, V_{rest} はパラメータで、$I(t)$ が入力電流を表す。イオンチャンネルの活性は、その膜電位依存性をモデル化する関数群 $\alpha_x(V)$, $\beta_x(V)$ を用いて $\dot{x}(t) = \alpha_x(V)(1-x) - \beta_x(V)x$ という形の方程式に従う ($x = m, h, n$)。以下では標準的なものを使用する [7]。

図 (a),(b) に、50 個の結合していない HH モデルに、共通の入力電流 $I(t)$ に加えて、種々の擾乱の効果を表す弱い白色 Gauss ノイズを独立に与え、同一の初期条件から数値計算して得たスパイク発火系列を示す (スパイク発火は $V(t)$ が適当な閾値を超える瞬間として定義する)。図 (a) は入力電流が一定値 $I(t) \equiv I_0 = 11\mathrm{nA}$ の場合である。独立に与えられる擾乱のため、初期状態から時間を経た後では、50 個の素子の発火タイミングはばらばらになっていることが分かる。これは、リミットサイクル解の軌道方向への中立安定性のため、擾乱の軌道方向の成分が減衰することなく残るためである。一方、図 (b) には、定常電流 I_0 に加え、Poisson 過程に従って発生するランダムなインパルス (平均インパルス間隔 100ms, インパルス強度は $\pm 2\mathrm{nA}$ を等確率で選択) を共通に与えた場合のスパイク発火系列を示す。この場合、擾乱があるにもかかわらず、初期状態からかなりの時間を経た後でも振動子がよく同期していることが分かる。以下、そのメカニズムを考察する。

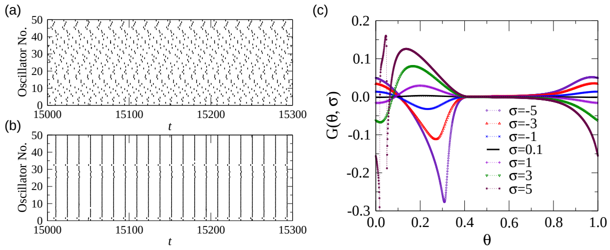

図 (a),(b) 50 個の HH モデルのスパイク発火系列。定常電流入力の場合 (a) と、それに加えてランダムにインパルス的な電流入力を受ける場合 (b)。図 (c) いくつかのインパルス強度における HH モデルの位相写像。

3　位相縮約理論による解析

上で示した同期現象は、変動外力による各々の振動子の軌道方向への摂動に対する安定化によるものであり、本質的に単一の振動子の問題である。我々の考えている状況は、一般には以下のランダム力学系で記述される：

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}; \mathbf{I}_0) + \mathbf{I}(t), \quad \mathbf{I}(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \mathbf{I}_n \delta(t - t_n) \qquad (2)$$

ここで $\mathbf{X}$ は系の力学変数で、$\mathbf{F}$ がそのダイナミクス、$\mathbf{I_0}$ は外力の定常な成分、$\mathbf{I}(t)$ はインパルス外力を表す。インパルスはレート λ の Poisson 過程に従って発生するものとして、$N(t)$ は時刻 t までに発生するインパルスの個数を、$\{t_n, \mathbf{I}_n\}$ は n 番目のインパルスの発生時刻と強度を表す。インパルス強度 $\mathbf{I}_n$ は確率密度関数 $Q(\mathbf{I})$ に従って発生するものとする。定常入力 $\mathbf{I_0}$ のみが与えられた場合、系は安定なリミットサイクル解 $\mathbf{X}_0(t)$ を持ち、ほぼ全ての相空間の点はこのリミットサイクルに吸引されると仮定する。

λ が小さくインパルス間隔が長い場合、振動子はほとんどの時間は定常入力 $\mathbf{I}_0$ のみを受けており、軌道はほぼ常にリミットサイクル上にある。時折インパルスを受けると軌道はリミットサイクルから外れるが、またすぐにリミットサイクル上に復帰する。このような場合、一般には多変数で表される振動子の発展を位相のみの方程式に簡略化することができ、これを位相縮約と呼ぶ。そのために、式 (2) を Poisson 過程に駆動される確率積分微分方程式に書き直す [8, 9]：

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}; \mathbf{I}_0)dt + \int \mathbf{I} M(dt, d\mathbf{I}) \qquad (3)$$

ここで $M(dt, d\mathbf{I})$ はランダム Poisson 測度で、時刻 $[t, t+dt]$ に強度 $[\mathbf{I}, \mathbf{I}+d\mathbf{I}]$ のインパルスの発生する個数を表し、その期待値は $E[M(dt, d\mathbf{I})] = \lambda Q(\mathbf{I}) dt d\mathbf{I}$ で与えられる。

位相 $\theta(\mathbf{X}) \in [0, 1]$ として、入力が $\mathbf{I}_0$ のみの場合のリミットサイクル $\mathbf{X}_0(t)$ 上を、一定の角速度 ω で増加するものを考え、これを特異点を除く相空間全体に拡張する [1, 2]。式 (3) に Poisson 駆動 Markov 過程に対する伊藤公式 [8, 9] を適用し、さらに、インパルスを受ける際には軌道はリミットサイクル近傍にあるとして、$\mathbf{X}(t)$ を $\mathbf{X}_0(\theta(t))$ で置き換える近似をすると、位相 $\theta(t)$ で閉じた方程式が得られる：

$$d\theta(t) = \omega dt + \int G(\theta(t), \mathbf{I}) M(dt, d\mathbf{I}) \qquad (4)$$

$G(\theta, \mathbf{I}) = \theta(\mathbf{X}_0(\theta) + \mathbf{I}) - \theta$ は軌道がリミットサイクル上の位相 θ の点で強度 $\mathbf{I}$ のインパルスを受けた際に、その位相がどう変化するかを表す周期関数であり、位相写像と呼ぶ。

位相 $\theta(t)$ への微小摂動 $\psi(t)$ を考えると、その絶対値の対数 $\ln|\psi(t)|$ の従う線形化方程式は、式 (4) より、

$$d \ln|\psi(t)| = \int \ln|1 + G'(\theta(t), \mathbf{I})| \, M(dt, d\mathbf{I}) \qquad (5)$$

で与えられる。ここで $'$ は θ 微分を表す。この式の期待値は、微小摂動の平均的な増大率を表す Lyapunov 指数

$$\Lambda = \lambda \int d\mathbf{I} Q(\mathbf{I}) \int d\theta P(\theta) \ln|1 + G'(\theta, \mathbf{I})| \qquad (6)$$

を用いて、$E[d \ln|\psi(t)|] = \Lambda dt$ と表される。ここで $P(\theta)$ は位相 θ の定常分布関数である。よって、この Λ が負なら、位相への摂動は指数的に減少し、振動子は同期する。特に、外部インパルスの強度が十分小さい時には、$G(\theta, \mathbf{I})$ は滑らかで振幅がも小さいため、$G'(\theta, \mathbf{I})$ の絶対値は常に 1 より小さくなる。また、位相の定常分布はほぼ一様となる ($P(\theta) \simeq 1$)。この時、$G(\theta, \mathbf{I})$ の周期性を用いると、$\Lambda \simeq \lambda \int d\mathbf{I} Q(\mathbf{I}) \int d\theta \ \ln|1 + G'(\theta, \mathbf{I})| \le \lambda \int d\mathbf{I} Q(\mathbf{I}) \int d\theta G'(\theta, \mathbf{I}) = \lambda \int d\mathbf{I} Q(\mathbf{I}) \{G(1, \mathbf{I}) - G(0, \mathbf{I})\} = 0$ より、Λ が常に 0 以下となることを一般的に示せる。等号成立は $G(\theta, \mathbf{I})$ が定数となる自明な場合である。

図 (c) に、HH モデルの V 成分に色々な強度 σ のインパルスを与えた場合の位相写像 $G(\theta, \sigma)$ を示す。$|\sigma|$ が小さい時は位相写像の振幅も小さく、上の議論により Λ が負となるため、振動子は外部インパルスに誘起された同期現象を示す。一方、$|\sigma|$ が大きくなると、位相写像の振幅が大きくなり、形状も急激に変化するようになるため、Λ が正となって、外部インパルスによる脱同期現象が生じることもあり得る。

4　まとめ

共通のランダム外部インパルスによる非線形振動子間の同期現象を、Poisson 駆動 Markov 過程と位相縮約の理論を用いて一般的に議論した。本稿では神経細胞のモデルを例にとって解説したが、我々の解析は非線形振動子一般に対して成立するものであり、電気回路や機械などにおける非線形振動現象にも原理的には適用可能だと考えられる。

参考文献

[1] A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer, 1980).

[2] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Dover, 2003).

[3] Z. F. Mainen and T. J. Sejnowski, Science **268** (1995) 1503.

[4] J. Teramae and D. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 204103.

[5] K. Nagai, H. Nakao, and Y. Tsubo, Phys. Rev. E **71** (2005) 036217.

[6] H. Nakao, K. Arai, K. Nagai, Y. Tsubo, and Y. Kuramoto, Phys. Rev. E **72** (2005) 026220.

[7] C. Koch, *Biophysics of Computation* (Oxford, 1999).

[8] I. Gihman and A. Skorohod, *Introduction to the Theory of Random Processes* (Saunders, 1969).

[9] D. L. Snyder, *Random Point Processes* (John Wiley & Sons, 1975).