

# 結合位相振動子系の安定性と同期現象

中尾裕也\*

\* 東京工業大学大学院情報理工学研究所, 東京都目黒区大岡山 2-12-1  
 \* Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, O-okayama 2-12-1, Meguro, Tokyo, Japan  
 \* E-mail: nakao@mei.titech.ac.jp

キーワード: 結合振動子 (coupled oscillators), 同期 (synchronization)

## 1. まえがき

複数の相互作用する自励振動要素 (振動子) からなる結合振動子系は, 実世界の様々なリズム現象のモデル化に用いられてきた<sup>1)</sup>. その顕著な挙動は振動子間の相互同期現象であり, 特に蔵本モデルに代表される結合位相振動子系の示す集団同期転移はよく知られている<sup>1)~6)</sup>. 現象によって振動子間の相互同期が望ましい場合も望ましくない場合もあるが, 非同期状態が不安定化して同期状態に至るメカニズムの理解は重要である. 本稿では, 最もシンプルで詳しく調べられてきた大域結合位相振動子系の振動子数が大きい極限における非同期状態の安定性と集団同期転移について, 古典的な結果を概説する. ふたつの典型的な状況として, 振動数が不均一だがノイズは受けていない系 (蔵本モデルはその代表である) と, 振動数は均一だがノイズを受けている系が考えられてきており, それぞれに対する基本的な解析を紹介する. また, 最近発展した Ott-Antonsen 仮説に基づく蔵本モデルの解析法と, いくつかの関連する話題について簡単に触れる.

## 2. 結合位相振動子系

### 2.1 リミットサイクル振動子の位相縮約

結合位相振動子系は, 一般のリミットサイクル振動子の結合系から, 振動子間の相互作用が弱い場合に有効な力学系の低次元化法である位相縮約法によって導出される. リミットサイクル振動子の時間発展が常微分方程式  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  によって表されるとする. ここで  $\mathbf{X}(t)$  は時刻  $t$  における振動子の状態を表す適当な次元の実ベクトルで, 滑らかなベクトル場  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  は  $\mathbf{X}$  のダイナミクスを表す. この系は周期  $T$  の漸近安定なリミットサイクル  $\mathbf{X}_0(t+T) = \mathbf{X}_0(t)$  を相空間内に持つとする.

このリミットサイクルとその吸引領域には, 以下のような「位相」を導入できる<sup>1)~4), 7)~9)</sup>. 振動子の状態  $\mathbf{X}$  に対して  $[0, 2\pi)$  の位相を与える関数を  $\hat{\theta}(\mathbf{X})$  としよう. 位相関数  $\hat{\theta}(\mathbf{X})$  は, 振動子の状態  $\mathbf{X}$  が  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  に従って時間発展するときに, その位相  $\theta(t) = \hat{\theta}(\mathbf{X}(t))$  が常に一定の振動数  $\omega = 2\pi/T$  で増加するように定義される. つまり, 振動子の位相は  $\dot{\theta}(t) = \omega$  に従って  $0$  から  $2\pi$  まで単調増加する (図1). 以下, リミットサイクル上の位相  $\theta$  の点における振動子の状態を  $\mathbf{X}_0(\theta)$  と表す.

このリミットサイクル振動子が弱い入力に駆動されて

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \epsilon \mathbf{p}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

という式に従っているとしよう. ここで入力  $\mathbf{p}(\mathbf{X}, t)$  は一般に振動子の状態  $\mathbf{X}$  と時間  $t$  に依存し,  $\epsilon (\ll 1)$  は入力の弱さを表す微小パラメータである. 入力十分に弱く, 状態  $\mathbf{X}(t)$  は入力を受けていないときのリミットサイクルの近傍に留まるとすると, その位相  $\theta(t) = \hat{\theta}(\mathbf{X}(t))$  は  $O(\epsilon)$  までの近似で

$$\dot{\theta}(t) = \omega + \epsilon \mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{p}(\theta, t) \quad (2)$$

という1次元の位相方程式に従うことが示せる. ここで,  $\mathbf{Z}(\theta) = \nabla \hat{\theta}(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(\theta)}$  はリミットサイクル上における位相関数  $\hat{\theta}(\mathbf{X})$  の勾配ベクトルで, 位相感受関数と呼ばれる. また, 入力  $\mathbf{p}(\mathbf{X}, t)$  中の  $\mathbf{X}$  をリミットサイクル上の点  $\mathbf{X}_0(\theta)$  で近似して,  $\theta$  の関数  $\mathbf{p}(\theta, t)$  と表している. このような位相縮約法は, 弱く相互作用する結合振動子系の解析に重要な役割を果たしてきた. その詳細については文献<sup>1)~4), 7)~9)</sup> などをご参照頂きたい.

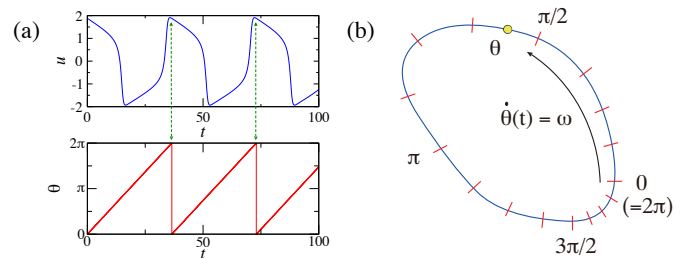


図1 リミットサイクル振動子の位相

(a) リミットサイクル振動の波形 (FitzHugh-南雲モデル<sup>7)</sup> の膜電位変数  $u$  と対応する位相  $\theta$  の時間発展. (b) リミットサイクルとその近傍の位相. 入力を受けていないときは位相  $\theta$  が常に一定の振動数  $\omega$  で増加するように定義される.

### 2.2 大域結合位相振動子系

近年, ロンドンのミレニアム橋が多数の歩行者の歩行リズムの集団同期によって揺れた現象や, 共通の台に置いたメトロノームが相互同期する現象が, YouTubeなどで有名になっている. そのような状況のモデルとして, 全ての振動子が大域的に結合した振動子系を考えよう.

$N$  個の振動子が、それらの作り出す大域的な平均場を介して弱く相互作用しているとする (図 2)。

$$\dot{\mathbf{X}}_\ell(t) = \mathbf{F}_\ell(\mathbf{X}_\ell) + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{H}(\mathbf{X}_j) \quad (3)$$

ここで  $\mathbf{X}_\ell$  は  $\ell (= 1, \dots, N)$  番目の振動子の状態,  $\mathbf{F}_\ell(\mathbf{X}_\ell)$  はそのダイナミクス,  $K \geq 0$  は結合強度,  $\mathbf{H}(\mathbf{X})$  は各振動子の平均場への寄与を表す関数である. このモデルは,  $\mathbf{F}_\ell$  間の差異と相互作用が小さいとき, 位相縮約によって

$$\dot{\theta}_\ell(t) = \omega_\ell + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\theta_\ell - \theta_j) \quad (4)$$

という大域結合位相振動子系に近似できる. ここで  $\theta_\ell$  は  $\ell$  番目の振動子の位相,  $\omega_\ell$  は振動数を表し,

$$\Gamma(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \mathbf{Z}(\phi + \psi) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{X}_0(\psi)) \quad (5)$$

は振動子間の実効的な相互作用を表す  $2\pi$ -周期的な位相結合関数で, 式 (2) の右辺第 2 項をさらに平均化近似することによって得られる<sup>2)~4), 7)~9)</sup>.

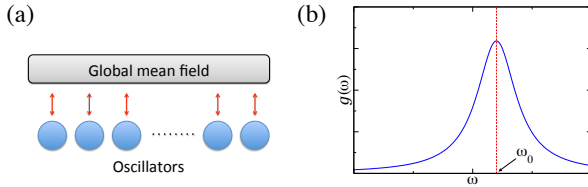


図 2 大域結合位相振動子系

(a) 大域結合振動子系. 各振動子が大域的な平均場を作り出し, その影響下で運動する. (b) 振動数の確率密度関数 (Lorentz 型). 各振動子の振動数はこの確率密度関数から独立に選ばれる.

### 2.3 ノイズを受けていない不均一な系

大域結合位相振動子系の典型例として, 振動数  $\omega_\ell$  が不均一であるとして, これをひと山の対称な確率密度関数  $g(\omega)$  からランダムに選ぶ場合がある. よく扱われる例は,  $g(\omega)$  が Gauss 型の場合や, Lorentz(Cauchy) 型

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (6)$$

の場合である (図 2). ここで  $\omega_0$  は分布の中央値,  $\gamma$  は幅を表す. その他の形状の  $g(\omega)$  も解析されており, 様々な現象が生じるが<sup>36), 10)</sup>, 本稿では上記の場合に話を限る.

特に, 位相結合関数が最もシンプルな引力的相互作用を表す  $\Gamma(\phi) = -\sin \phi$  の場合には, 式 (4) は

$$\dot{\theta}_\ell(t) = \omega_\ell - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_\ell - \theta_j) \quad (7)$$

となる. これは「蔵本モデル」と呼ばれ, その集団同期現象は詳しく調べられており<sup>2)~6)</sup>, 結合強度  $K$  がある臨界値  $K_c$  よりも大きければ, 相互作用の効果が振動数の不均一性の効果に打ち勝って, 系は集団同期する (図 3).

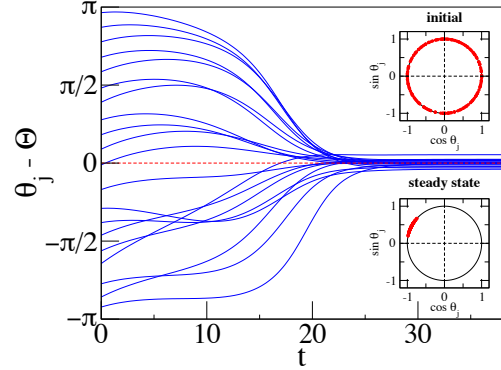


図 3 蔵本モデルの集団同期現象

ランダムな初期条件から出発した各振動子の相対位相  $\theta_j - \Theta$  の時間発展 ( $\Theta$  は式 (9) で定義される集団位相).  $\Gamma(\phi) = -\sin \phi$ ,  $N = 200$ . 一部の振動子のみを表示.

### 2.4 ノイズを受けた均一な系

実世界の振動子は何らかの揺らぎを受けていることが多いため, 式 (4) にノイズを加えた大域結合位相振動子系

$$\dot{\theta}_\ell(t) = \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\theta_\ell - \theta_j) + \sqrt{2D} \xi_\ell(t) \quad (8)$$

もよく扱われる. これは Langevin 方程式 (確率微分方程式と等価)<sup>11)</sup> であり, 各振動子は独立な白色 Gauss ノイズ  $\xi_\ell(t)$  に駆動されている. ここで, 各  $\xi_\ell(t)$  は  $\langle \cdot \rangle$  を統計平均として  $\langle \xi_\ell(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_\ell(t) \xi_m(s) \rangle = \delta(t - s) \delta_{\ell, m}$  によって特徴づけられ,  $D$  はノイズの強さを表す. また, ノイズの効果を明確にするために, 振動数  $\omega_\ell$  は均一で, 全て同じ値  $\omega$  をとるとしている. この系の集団同期現象も詳しく調べられてきており<sup>2), 3)</sup>, 結合強度  $K$  がある臨界値  $K_c$  よりも大きければ, 相互作用の効果がノイズの効果に打ち勝って, やはり系は集団同期する (図 4).

### 2.5 秩序パラメータ

系の振動子間の同期の度合いは, 蔵本の導入した<sup>2), 3)</sup>

$$z = R \exp(i\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(i\theta_j) \quad (9)$$

で与えられる秩序パラメータの振幅  $R$  によって定量化されることが多い.  $R$  は 0 から 1 までの値を取り, 系の振動子が全く同期しておらず, 各  $\theta_j$  がばらばらに運動していれば  $N \rightarrow \infty$  の極限で  $R = 0$  となる ( $N$  が有限の場合には  $O(1/\sqrt{N})$  程度で揺らぐ). 一方, 系の全ての振動子が完全に同期しており, 全ての  $\theta_j$  が等しければ,  $R = 1$

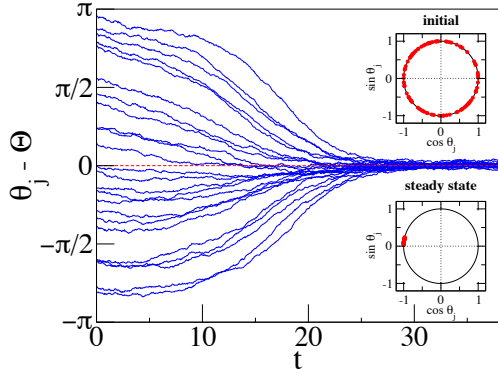


図4 ノイズを受けた均一な系の集団同期現象  
ランダムな初期条件から出発した各振動子の相対位相  $\theta_j - \Theta$  の時間発展 ( $\Theta$  は式 (9) で定義される集団位相).  $\Gamma(\phi) = -\sin \phi$ ,  $N = 100$ . 一部の振動子のみを表示.

となる. また,  $R > 0$  のときの  $\Theta$  は系の集団振動の位相を与える. 特に,  $\Gamma(\phi)$  が  $\sin$  型の場合には,  $R \exp(i\Theta)$  は系の平均場となり, 重要な役割を果たす.

上記のいずれの系でも,  $\Gamma(\phi)$  として適切な引力的相互作用を選べば, ある臨界結合強度  $K_c$  を境に集団同期転移が生じる. 結合強度が  $K < K_c$  のときには, 系の個々の振動子はばらばらに振る舞い, 位相が一様分布した状態が安定で, ( $N \rightarrow \infty$  の極限で)  $R = 0$  となる. 一方,  $K > K_c$  のときには, 多数の振動子が集団同期を起こし, 位相が一様分布した状態は不安定化して  $R > 0$  となる. なお,  $K_c$  の値は系によって異なり,  $\Gamma(\phi)$  の形状, 振動数分布  $g(\omega)$ , ノイズ強度  $D$  などによって決まる.

ノイズを受けていない不均一な蔵本モデルの定常状態における秩序パラメータの振幅  $R$  を結合強度  $K$  に対してプロットしたものを図5に示す.  $K$  が臨界値  $K_c$  を超えると  $R$  が急に増加に転じていることがわかる. ノイズを受けた均一な系に対しても  $R$  は同様の依存性を示す.

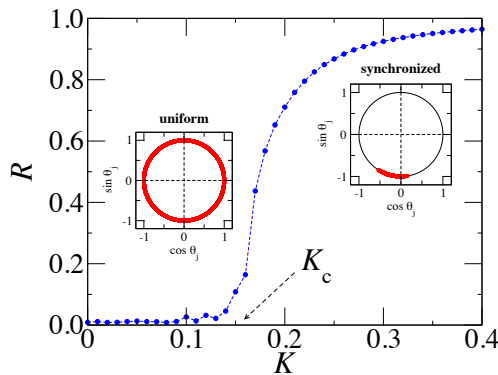


図5 蔵本モデルの秩序パラメータの結合強度依存性  
蔵本モデルの定常状態における系の秩序パラメータの絶対値  $R$  の  $K$  依存性と振動子の位相の分布.  $K = K_c$  で集団同期転移が生じる.  $\Gamma(\phi) = -\sin \phi$ ,  $N = 8000$ . 若干の揺らぎは有限サイズ効果による.

### 3. ノイズを受けた均一な系の解析

#### 3.1 非線形 Fokker-Planck 方程式

まず, Langevin 方程式 (8) で記述されるノイズを受けた均一な大域結合位相振動子系を, 振動子数  $N \rightarrow \infty$  の極限で考察しよう.  $N$  個の振動子の位相  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  の  $N$  体確率密度関数 (probability density function, 以下 PDF)  $P(\theta, t)$  は, 多変数の Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\theta, t) = - \sum_{\ell=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta_{\ell}} \left\{ \left[ \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\theta_{\ell} - \theta_j) \right] P(\theta, t) \right\} + D \sum_{\ell=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \theta_{\ell}^2} P(\theta, t) \quad (10)$$

に従う<sup>11)</sup>.

大域結合系においては, 全ての振動子が同様の状況下にあるため, どの振動子も統計的に同じ性質を示す. そこで, 解析を進めるために, あるひとつの振動子  $k$  の位相  $\theta_k$  のみに着目して,  $N$  体の PDF  $P(\theta, t)$  を他の全ての位相変数を周辺化 (積分) して得られる  $\theta_k$  の1体の PDF  $P(\theta_k, t)$  を考えよう. 今後,  $\theta_k$  を単に  $\theta$  と書く.  $N \rightarrow \infty$  の極限で,  $P(\theta, t)$  は非線形 Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\theta, t) = - \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left[ \omega + KQ \right] P \right\} + D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P, \quad (11)$$

$$Q(\theta, t) = \int_0^{2\pi} P(\psi, t) \Gamma(\theta - \psi) d\psi$$

に従うことが知られている<sup>2), 3), 5), 6)</sup>. なお, 式 (10) を周辺化する際には2体の PDF が現れるが, いわゆる「分子カオスの伝播」と呼ばれる性質が成り立ち, これを1体の PDF の積と表せることから式 (11) が得られる<sup>6)</sup>.

この方程式は, 厳密ではないが直観的に解釈できる. Langevin 方程式 (8) の右辺第2項の  $\{\theta_j\}$  に関する平均を,  $N \rightarrow \infty$  の極限で  $\theta$  の1体 PDF を用いて

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\theta_{\ell} - \theta_j) \rightarrow \int_0^{2\pi} P(\psi, t) \Gamma(\theta_{\ell} - \psi) d\psi \quad (12)$$

と置き換えたとして. すると, Langevin 方程式 (8) は形式的に  $\dot{\theta}_{\ell}(t) = \omega + KQ(\theta_{\ell}, t) + \sqrt{2D}\xi_{\ell}(t)$  と表され, 式 (11) はこれに対応する  $\theta_{\ell}$  の1体 PDF  $P(\theta_{\ell}, t)$  の Fokker-Planck 方程式の形となっていることがわかる.

なお,  $P(\theta, t)$  は  $\theta$  の  $2\pi$ -周期関数であり, 確率密度関数なので規格化条件  $\int_0^{2\pi} P(\theta, t) d\theta = 1$  を満たす. また, 式 (9) の秩序パラメータは  $N \rightarrow \infty$  では

$$z = R \exp(i\Theta) = \int_0^{2\pi} \theta P(\theta, t) \exp(i\theta) \quad (13)$$

と表される.

### 3.2 一様定常状態の安定性

非線形 Fokker-Planck 方程式 (11) は、自明な定常解

$$P_0(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (14)$$

を持つ。これは、系の振動子の状態がリミットサイクル上に一様に分布している完全な非同期状態に対応する。この一様状態の線形安定性を調べよう。\$P\_0(\theta)\$ への微小な擾乱を \$q(\theta, t)\$ として、\$P(\theta, t)\$ を

$$P(\theta, t) = P_0(\theta) + q(\theta, t) \quad (15)$$

とおく。式 (11) に代入し、\$q(\theta, t)\$ について線形化すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q(\theta, t) = & -\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ q(\theta, t) \left[ \omega + \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma(\theta - \psi) d\psi \right] \right. \\ & \left. + \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma(\theta - \psi) q(\psi, t) d\psi \right\} + D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} q(\theta, t) \end{aligned} \quad (16)$$

となる。さらに、\$2\pi\$-周期関数である \$q(\theta, t)\$ と \$\Gamma(\phi)\$ を

$$q(\theta, t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} q_\alpha(t) \exp(i\alpha\theta) \quad (17)$$

$$\Gamma(\phi) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \Gamma_\alpha \exp(i\alpha\phi) \quad (18)$$

と Fourier 展開して代入すると、式 (16) を Fourier モード毎に分解できて、波数 \$\alpha\$ のモードの係数 \$q\_\alpha(t)\$ は

$$\dot{q}_\alpha(t) = -i\alpha(\omega + K\Gamma_0 + K\Gamma_\alpha)q_\alpha - D\alpha^2 q_\alpha \quad (19)$$

に従う。よって、\$q\_\alpha(t)\$ の指数関数的な成長率 \$\lambda\_\alpha\$ の実部は

$$\text{Re}\lambda_\alpha = \alpha K(\text{Im}\Gamma_\alpha) - D\alpha^2 \quad (20)$$

となり、これが負なら波数 \$\alpha\$ のモードは線形安定、正なら不安定である。\$\Gamma(\phi)\$ は実関数なので \$\text{Im}\Gamma\_\alpha = -\text{Im}\Gamma\_{-\alpha}\$, \$\text{Im}\Gamma\_0 = 0\$ であることに注意すると、\$\text{Im}\Gamma\_\alpha > 0\$ のとき、

$$K > \frac{D\alpha}{\text{Im}\Gamma_\alpha} \quad (21)$$

であれば波数 \$\pm\alpha\$ のモードが不安定化し、系が集団同期を示す可能性がある (図 7)。このことから、\$\text{Im}\Gamma\_\alpha > 0\$ となる各 \$\alpha\$ に対する \$K\$ の臨界値の中で最小のものが、系の臨界結合強度 \$K\_c\$ となる。なお、\$\alpha = 0\$ の一様モードは中立安定だが、\$P(\theta, t)\$ の規格化より常に \$q\_0(t) = 0\$ である。また、位相結合関数 \$\Gamma(\phi)\$ に対応する波数の成分が含まれないモードは不安定化しない。特に、結合関数が \$\sin\$ 型 \$\Gamma(\phi) = -\sin\phi = -(e^{i\phi} - e^{-i\phi})/(2i)\$ の場合、\$\text{Im}\Gamma\_1 = 1/2\$ なので、\$\alpha = \pm 1\$ の基本波のみが不安定化して、臨界結合強度は \$K\_c = 2D\$ となることがわかる。

### 3.3 集団同期とクラスタリング

結合強度 \$K\$ が \$K\_c\$ を超える際、\$\text{Re}\lambda\_\alpha\$ に縮退がなければ、一对の複素共役な固有値 \$\lambda\_{\pm\alpha}\$ が虚軸を横切り、Hopf 分岐が起こる。\$K \approx K\_c\$ の臨界結合強度の近くでは、不安定化したモードの複素振幅を \$W(t)\$ として \$\theta\$ の PDF は

$$P(\theta, t) \approx P_0(\theta) + W(t) \exp(i\alpha\theta) + c.c. \quad (22)$$

(*c.c.* は複素共役) と表せ、弱非線形解析によって \$W(t)\$ の振幅方程式が求められる<sup>2), 3)</sup>。Hopf 分岐が超臨界ならば、\$K\$ が \$K\_c\$ より少し大きいとき、この \$W(t)\$ の定常値はスケールした分岐点からの距離 \$\mu = (K - K\_c)/K\_c\$ に対して \$W(t) \sim \sqrt{\mu}\$ のように連続的に増加する。従って、位相の分布は波数 \$\alpha\$ の緩やかな粗密波として系を伝わり、集団同期が生じる。なお、\$\Gamma(\phi) = -\sin\phi\$ ならば、式 (13) より \$W\$ は系の秩序パラメータ \$z\$ の複素共役に等しい。

結合強度 \$K\$ がさらに増加すると振幅方程式は有用ではなくなるが、位相の分布は一般により鋭くなり、\$K\$ が十分に大きくなると、いくつかのクラスター (グループ) に分かれる。\$\Gamma(\phi) = -\sin\phi\$ であれば、不安定化するのには \$\alpha = \pm 1\$ のモードのみなので、全振動子の位相が近い値を取る 1 クラスタ状態が実現される。また、例えば文献<sup>13)</sup>で、著者らは \$N\$ 字型の区分線形な \$\Gamma(\phi)\$ を考察した。この \$\Gamma(\phi)\$ は多数の高調波を含むため、パラメータにより様々な個数のクラスター状態が生じる。クラスターの個数は一様定常解が不安定化する波数で決まることが多いが、非線形性による複雑なダイナミクスによって異なる状況に至ることもある。図 6 に、Langevin 方程式 (8) の直接数値計算による位相のスナップショットと対応する非線形 Fokker-Planck 方程式 (11) の定常解を示す。

## 4. ノイズを受けていない不均一な系の解析

### 4.1 自己無撞着な扱い

次に、ノイズを受けていない不均一な系を考えよう。まず、蔵本による式 (7) の自己無撞着解析の概略を述べる<sup>2)</sup>。平均場 (9) を用いると、式 (7) の結合項は

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_\ell - \theta_j) = R \sin(\theta_\ell - \Theta) \quad (23)$$

と表せる。系が集団同期して平均場が一定の振動数 \$\Omega\$ で定常振動すると仮定して \$R = \text{const.}\$, \$\Theta = \Omega t\$ とおくと、

$$\dot{\theta}_\ell(t) = \omega_\ell - KR \sin(\theta_\ell - \Omega t) \quad (24)$$

となる。これは周期入力に駆動される位相振動子と見ることができ、入力との位相差を \$\psi\_\ell = \theta\_\ell - \Omega t\$ とおくと

$$\dot{\psi}_\ell(t) = \omega_\ell - \Omega - KR \sin \psi_\ell \quad (25)$$

となる。よって、個々の振動子の運動は \$\omega\_\ell\$ の値で決まり、\$|\omega\_\ell - \Omega| < KR\$ であれば \$\psi\_\ell\$ が安定固定点を持つため振

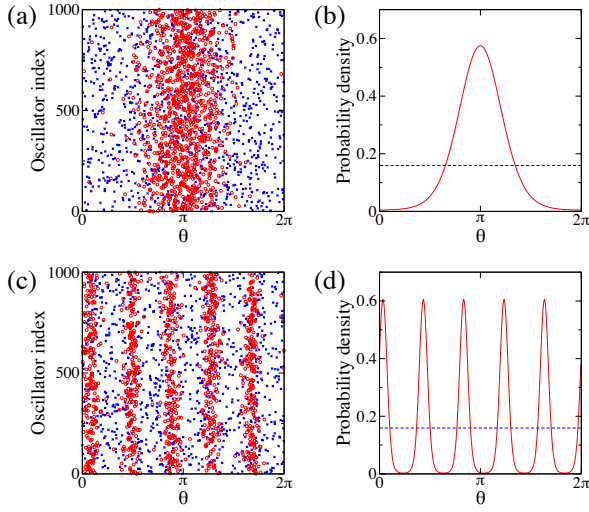


図6 ノイズを受けた均一系の挙動  
(a,b)  $\Gamma(\phi)$  が  $\sin$  型の場合. (a) 一様状態と集団同期状態 (Langevin 方程式の直接解). (b) 一様状態と集団同期状態の 1 対 PDF (非線形 Fokker-Planck 方程式の数値解). (c,d)  $\Gamma(\phi)$  が  $N$  字型の場合. (c) 一様状態と 5 クラスタ状態 (Langevin 方程式の直接解). (d) 一様状態と 5 クラスタ状態の 1 対 PDF (非線形 Fokker-Planck 方程式の数値解).

動子は平均場と同期する. 一方,  $|\omega_\ell - \Omega| > KR$  である振動子は平均場に同期できずドリフトを続ける.

ここで, 平均場  $R \exp(i\Theta)$  によって各振動子の運動が決まり, また各振動子は式 (9) によって平均場を決めるので, それらは自己無撞着 (self-consistent) でなくてはならない. この条件より,  $g(\omega)$  が中央値  $\omega_0$  に関して対称なとき,  $N \rightarrow \infty$  の極限で, 平均場の振動数  $\Omega$  は  $\omega_0$  に等しく, 振幅  $R$  は  $R = h(KR)$  という形の方程式を満たすことが示される<sup>2)</sup>. ここで  $h(x)$  は  $h(0) = 0$  で  $x \rightarrow \infty$  で傾きが 1 以下となる単調増加関数であり,  $R = 0$  での傾き  $h'(0)$  は  $\pi K g(\omega_0)/2$  となる. 従って, この方程式は,  $R = 0$  の自明な解に加え,  $h'(0) > 1$  であれば  $R > 0$  となる非自明な解を持ち, 前者は一様状態, 後者は集団同期状態に対応する. 後者の非自明な解が現れる条件は

$$K > K_c = \frac{2}{\pi g(\omega_0)} \quad (26)$$

と表せる. また,  $R > 0$  の解は,  $\mu = (K - K_c)/K_c$  として  $R \sim \sqrt{\mu}$  となることが示されている<sup>2), 5)</sup>.

なお, この解析では各状態の安定性は議論されていないことに注意が必要である. 分岐点近傍での集団同期解の挙動は先程のノイズを受けた均一系の Hopf 分岐に似ているが, これが実際に Hopf 分岐であることを示すのは数学的に難しく, 最近なって千葉によって解決された<sup>14)</sup>. また, 自己無撞着法の一般の  $\Gamma(\phi)$  の場合への拡張は大同によって行われており<sup>15)</sup>,  $\Gamma(\phi)$  が高調波を含む場合には, 集団振動の分岐点近傍での振幅が一般に  $R \sim \sqrt{\mu}$  とはならず,  $R \sim \mu$  となることが示されている. ノイズを

受けた系の場合には, 縮退のない超臨界 Hopf 分岐であれば  $\Gamma(\phi)$  の形に関わらず  $R \sim \sqrt{\mu}$  なので, これは不均一な系に特有の結果である.

#### 4.2 確率密度の発展方程式と一様定常状態の安定性

ノイズを受けていない不均一な系 (4) についても確率密度の発展を考えることができる. この場合, 振動子の振動数が  $g(\omega)$  に従って分布しているため,  $g(\omega) > 0$  となる各  $\omega$  に対して (この集合を  $\text{supp}(g)$  と書く), 位相  $\theta$  を持つ振動子の PDF  $P(\theta, t; \omega)$  を考える必要がある. 規格化は  $\omega$  毎に  $\int_0^{2\pi} P(\theta, t; \omega) d\theta = 1$  とする. この  $P(\theta, t; \omega)$  は以下の非線形な発展方程式に従うことが示せる<sup>5), 12)</sup>.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\theta, t; \omega) &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \{ [\omega + KQ] P(\theta, t; \omega) \}, \\ Q(\theta, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') \int_0^{2\pi} d\psi P(\psi, t; \omega') \Gamma(\theta - \psi) \end{aligned} \quad (27)$$

この方程式も, 非線形 Fokker-Planck 方程式 (11) と同様に,  $N$  体 PDF の従う発展方程式から導出されるが, 各振動子が感じる平均的な相互作用  $Q(\theta, t)$  に振動数  $\omega$  に関する積分が含まれていること, また, ノイズを受けていないため拡散項がないことが大きな違いである.

式 (27) も完全な非同期状態に対応する一様定常解

$$P_0(\theta; \omega) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \theta < 2\pi, \omega \in \text{supp}(g)) \quad (28)$$

を持つことがわかる. この解の安定性を調べるため, 先程と同様に小さな擾乱  $q(\theta, t; \omega)$  を与えた

$$P(\theta, t; \omega) = P_0(\theta; \omega) + q(\theta, t; \omega) \quad (29)$$

を式 (27) に代入し,  $q(\theta, t; \omega)$  について線形化すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q(\theta, t; \omega) &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left[ \omega + \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma(\theta - \psi) d\psi \right] \times \right. \\ &\left. q(\theta, t; \omega) + \frac{K}{2\pi} \int d\omega' g(\omega') \int_0^{2\pi} \Gamma(\theta - \psi) q(\psi, t; \omega') d\psi \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

となる. さらに  $q(\theta, t; \omega)$  を Fourier 級数展開して

$$q(\theta, t; \omega) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} q_\alpha(t; \omega) \exp(i\alpha\theta) \quad (31)$$

と表すと, 振動数が  $\omega$  で波数が  $\alpha$  の Fourier モードの係数  $q_\alpha(t; \omega)$  は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q_\alpha(t; \omega) &= -i\alpha(\omega + K\Gamma_0) q_\alpha(t; \omega) \\ &\quad - i\alpha K \Gamma_\alpha \int d\omega' g(\omega') q_\alpha(t; \omega') \end{aligned} \quad (32)$$

に従うことがわかる。この式の右辺の線形作用素の固有値により一様定常解の安定性が決まる。

蔵本モデル  $\Gamma(\phi) = -\sin \phi$  の場合には  $\Gamma_{\pm 1} = \pm i/2$  だけが0ではないので、波数が  $\alpha \neq \pm 1$  のモードの固有値は全て純虚数  $i\alpha\omega$  ( $\omega \in \text{supp}(g)$ ) となり、中立安定である。一方、波数  $\alpha = 1$  のモードに対しては

$$\frac{\partial}{\partial t} q_1(t; \omega) = -i\omega q_1(t; \omega) + \frac{K}{2} \int d\omega' g(\omega') q_1(t; \omega') \quad (33)$$

という式が、 $\alpha = -1$  に対してはその複素共役が得られる。右辺の作用素は虚軸上に連続固有値  $i\omega$  ( $\omega \in \text{supp}(g)$ ) を持ち、さらに  $K$  がある臨界値  $K_c$  より大きいときには

$$1 = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}\lambda}{(\text{Re}\lambda)^2 + (\omega - \omega_0)^2} g(\omega) d\omega \quad (34)$$

を満たす実部が正で虚部が  $\omega_0$  の離散固有値  $\lambda$  を持つことが示されている<sup>5), 12)</sup>。つまり、 $K > K_c$  では一様定常解が不安定化して集団同期が生じ得る(図7)。

臨界値  $K_c$  は、 $\text{Re}\lambda \rightarrow +0$  としたときに  $\lambda/(\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2) \rightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0)$  となり、上式が  $1 = K\pi g(\omega_0)/2$  となることから  $K_c = 2/(\pi g(\omega_0))$  と求まり、これは式(26)と一致する。特に  $g(\omega)$  が Lorentz 型のときには  $K_c = 2\gamma$  で、式(34)の積分は  $1/(\text{Re}\lambda + \gamma)$  となり、 $\alpha = 1$  のモードの固有値は  $\lambda = (K/2 - \gamma) - i\omega_0$  となる。もう一方の  $\alpha = -1$  のモードに対してはその複素共役が得られる。

以上より、 $K < K_c$  では固有値は実部が0の純虚数のみとなるため、一様定常解に与えた微小擾乱は減衰しないように見え、ノイズを受けた均一な系とは異なる結果となる。しかし、実際には、 $N$  が十分に大きければ、 $K < K_c$  では平均場の振幅  $R$  は指数関数的に減衰することが数値シミュレーションによって示されている。この食い違いについては古くから議論されており、振動数  $\omega$  の不均一性によってプラズマ振動における Landau 減衰と同様の現象が生じていることが Strogatz と Mirollo によって指摘されていた<sup>5), 12)</sup>。最近、千葉によって高度に数学的な解析がなされ、臨界結合強度近傍における式(27)の中心多様体縮約によって Hopf 分岐の標準形が導出され、集団同期解の安定性の問題も解決されている<sup>14)</sup>。

### 4.3 Ott-Antonsen 仮説

Ott と Antonsen は、2008 年に出版した論文で、 $g(\omega)$  が Lorentz 分布(より一般に有理関数)のときには、PDF の形状にある仮説をおくことによって、PDF の発展方程式から系の平均場の従う低次元方程式を簡単に導出できることを発見し、注目されている<sup>16)</sup>。以下、Ott と Antonsen の扱いを蔵本モデルの場合について述べる。

まず、 $N \rightarrow \infty$  での平均場(9)は、振動数の分布も考

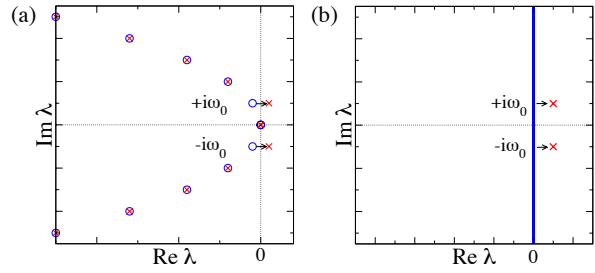


図7 一様定常解の安定性

(a) ノイズを受けた均一な系の固有値 ( $\Gamma(\phi) = -\sin \phi$ )。  $K < K_c$  では一様モードを除く全てのモードは減衰する。  $K > K_c$  では  $\alpha = \pm 1$  の固有値の実部が正となり、対応するモードが不安定化して集団同期に至る。(b) 蔵本モデルの固有値。  $K < K_c$  では虚軸上の連続スペクトルのみがある。  $K > K_c$  では連続スペクトルに加えて  $\alpha = \pm 1$  のモードに対応する実部が正の離散固有値が出現し、対応するモードが不安定化して集団同期に至る。

慮すると

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') \int_0^{2\pi} d\psi P(\psi, t) \exp(i\psi) \quad (35)$$

となる。また、 $\Gamma(\phi) = -\sin \phi$  なので、式(27)の  $Q$  は

$$Q(\theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') \int_0^{2\pi} d\psi P(\psi, t; \omega') \sin(\psi - \theta) \quad (36)$$

となる。従って、これを  $z(t)$  を用いて (\* は複素共役)

$$Q(\theta, t) = \text{Im}(z(t)e^{-i\theta}) = \frac{z(t)e^{-i\theta} - z^*(t)e^{i\theta}}{2i} \quad (37)$$

と表せる。Ott-Antonsen 仮説では、 $\theta$  の PDF を

$$P(\theta, t; \omega) = P_0(\theta) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} P_{\alpha}(t; \omega) e^{i\alpha\theta} + c.c. \quad (38)$$

と Fourier 展開したときに、その  $\alpha \geq 1$  の展開係数が

$$P_{\alpha}(t; \omega) = A(t; \omega)^{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots) \quad (39)$$

という特殊な形をとると仮定する。すると、式(27), (37)より  $\alpha$  毎に  $A(t; \omega)$  の従う式が得られ、特に  $\alpha = 1$  では

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t; \omega) = -i\omega A + \frac{K}{2}(z^* - zA^2) \quad (40)$$

となり、また、平均場  $z(t)$  は

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') A^*(t; \omega) \quad (41)$$

と表せることがわかる。 $g(\omega)$  が Lorentz 型のときには

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\gamma} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma} \right) \quad (42)$$

なので、留数定理を用いて下半平面で積分すると

$$z(t) = A^*(t; \omega = \omega_0 - i\gamma) \quad (43)$$

となり、 $\omega = \omega_0 - i\gamma$  における  $A(t; \omega)$  の値だけで  $z(t)$  が決まることがわかる。これを式 (40) に代入すると

$$\dot{z}(t) = i(\omega_0 + i\gamma)z + \frac{K}{2}(z - |z|^2z) \quad (44)$$

という平均場の従う式が得られ、これは超臨界 Hopf 分岐の標準形の形をしている。さらに  $z = Re^{i\theta}$  とおけば

$$\dot{R}(t) = \left(-\gamma + \frac{K}{2}\right)R - \frac{K}{2}R^3, \quad \dot{\theta}(t) = \omega_0 \quad (45)$$

となって、振幅  $R$  の式の固定点より、結合強度が

$$K > K_c = 2\gamma \quad (46)$$

を満たすときには、 $R$  は正の値

$$R = \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{K}} \quad (47)$$

をとる。このように、臨界結合強度  $K_c$  と、 $K$  の全範囲における平均場  $z(t)$  の従う方程式が簡単に導かれ、集団同期転移が超臨界 Hopf 分岐であることが示される。

Ott-Antonsen 仮説は非常に大胆で、特殊な場合にしか成り立たないものと思われたが、その後の研究<sup>17)</sup>で、これは考える PDF を Poisson 核と呼ばれるクラスに制限することに相当し、系の初期 PDF を Poisson 核のなす多様体上にとれば、系を式 (27) で時間発展させてもその PDF はやはりこの多様体上に留まることなどが示されている。さらに、渡辺-Strogatz 変換として知られる結合振動子系の別の低次元化法との関連も議論されている。

Ott-Antonsen 仮説は、 $g(\omega)$  が複数のピークを持つ場合<sup>10)</sup> や、周期的な入力がかわっている場合の解析にも適用され、無限自由度の結合振動子系の集団振動を低次元化して詳しく解析することが可能となっている。例えば文献<sup>18)</sup>では、この手法を用いて、相互作用するふたつの蔵本モデルの集団振動間の同期現象が議論されている。

## 5. 関連する話題

### 5.1 モデルの一般化

本稿では最もシンプルな大域結合位相振動子系の挙動について述べてきたが、大域結合に限っても様々な一般化がある<sup>6), 10), 15), 19)</sup>。例えば、最もシンプルな蔵本モデルにおいても、 $g(\omega)$  の形状により様々な同期現象が生じ得る<sup>10), 19)</sup>。結合関数  $\Gamma(\phi)$  についても、例えば  $\Gamma(\phi) = -\sin(\phi + \alpha)$  と一般化するだけでも蔵本モデルとは定性的に異なる同期現象が生じ<sup>20)</sup>、高調波成分を持つ場合にはさらに様々な挙動が生じる<sup>15)</sup>。

大域結合以外の振動子間の相互作用も古くから議論されてきている。特に、格子点上あるいは連続媒質上で、振動子が隣接する振動子と局所 (拡散) 結合した系は、振動性化学反応における非線形波動やパターン形成のモデルとして古くから解析されている<sup>2)</sup>。近年では、振動子間の距離とともに結合強度が減少する非局所結合位相振動子系において、位相が揃った集団とばらばらな集団がひとつの系内に共存するキメラと呼ばれる状態が発見されており、興味を惹いている<sup>21), 22)</sup>。

また、一般のネットワーク上の結合位相振動子系についても近年大変多くの研究がなされており、様々な性質が調べられてきている<sup>23)</sup>。例えば、性質の近いリミットサイクル振動子群がネットワークを介して相互作用している状況を考え、その隣接行列を  $A_{\ell j}$  (振動子  $\ell$  と  $j$  に結合があれば 1, なければ 0) とすると、位相縮約により

$$\dot{\theta}_\ell(t) = \omega_\ell + K \sum_{j=1}^N A_{\ell j} \Gamma(\theta_\ell - \theta_j) \quad (48)$$

という形のネットワーク結合位相振動子系が得られる。特にスケールフリーネットワーク上の蔵本タイプのモデルの集団同期転移は、一宮や Restrepo らにより解析された<sup>24), 25)</sup>。その後も多数の研究がなされ、ネットワーク構造と同期現象の関係などについて議論されてきている。

### 5.2 慣性項を持つモデル

リミットサイクル振動子の結合系から系統的な位相縮約によって得られるわけではないが、蔵本モデルに慣性項を付与した形の以下の形の「結合位相振動子系」

$$m_\ell \ddot{\theta}_\ell + \dot{\theta}_\ell = \omega_\ell - \sum_{k=1}^N A_{\ell k} \sin(\theta_\ell - \theta_k - \alpha_{\ell k}) \quad (49)$$

も古くから研究されてきており ( $m_\ell, \alpha_{\ell k}$  はパラメータ)、例えば大域結合の場合にはヒステリシスを持った同期転移を示すことなどが知られている<sup>26)</sup>。電力システムを記述する swing 方程式からもこれに似た方程式が導出され、その形の類似性から近年盛んに研究されており<sup>27), 28)</sup>、特に、ネットワークのトポロジーを変化させた場合の同期状態の安定性などに関する多くの研究がある。なお、このタイプの結合位相振動子モデルの位相は、位相縮約における位相とは異なり、実際には 2 自由度をもつ力学変数であるので、その解釈には注意が必要である。

### 5.3 大域的な安定性

本稿では触れなかったが、蔵本タイプの一部のモデルにおいては、系が Lyapunov 関数を持つ場合がある。その際には、局所的な線形安定性解析のみならず、大域的な安定性解析が可能となる。古くは van Hemmen と Wreszinski により議論されており<sup>29)</sup>、最近では、Jadbabaie ら<sup>30)</sup>

による一般化が行われている。また、蔵本モデルに加え、上記の慣性項を付与したモデルにおいても一般的に成立する同期条件なども議論されている<sup>31)</sup>。一方、ノイズを受けた均一な系についても、非線形 Fokker-Planck 方程式の H 定理に関する議論が行なわれており<sup>32)</sup>、やはり sin 型結合などの限られた場合においては Lyapunov 汎関数の存在が示され、大域的な安定性が示されている。

## 6. まとめ

本稿では最もシンプルな大域結合位相振動子系の代表的なふたつのモデルについて、その古典的な解析の概略を述べ、また最近の発展として Ott-Antonsen 仮説について述べた。実際の現象においては、集団同期が望ましい場合もそうでない場合もあり、一様状態と集団同期状態どちらの制御も重要であろう。例えば、神経細胞の病理的な同期現象が原因となる Parkinson 病に関して、高周波のパルス刺激を用いた同期の抑制が試みられているが、振動子の挙動を踏まえてより効率的な同期の抑制を目指す研究なども行われており、興味深い<sup>33)</sup>。結合振動子系については様々な分野で非常に多彩な研究がなされてきている。詳しくは書籍やレビューをご参照頂きたい。

(2015 年 12 月 28 日受付)

### 参考文献

- 1) A. T. Winfree, "The geometry of biological time", Springer (1980/2001).
- 2) Y. Kuramoto, "Chemical oscillations, waves, and turbulence", Springer (1984)/Dover (2003).
- 3) 蔵本由紀・河村洋史, 「同期現象の数理」, 培風館 (2010).
- 4) 郡宏・森田善久, 「生物リズムと力学系」, 共立出版 (2010).
- 5) S. H. Strogatz, "From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators", *Physica D* **143**, 1-20 (2000).
- 6) J. A. Acebrón *et al.*, "The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena", *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137-185 (2005).
- 7) G. B. Ermentrout and D. H. Terman, *Mathematical Foundations of Neuroscience*, Springer (2010).
- 8) H. Nakao, "Phase reduction approach to synchronisation of nonlinear oscillators", *Contemporary Physics* (2015).
- 9) 中尾裕也, 「非線形振動子の位相縮約理論とその応用」, *システム/制御/情報* **53**, 316 (2009).
- 10) E. A. Martens *et al.*, "Exact results for the Kuramoto model with a bimodal frequency distribution", *Phys. Rev. E* **79**, 026204 (2009).
- 11) C. W. Gardiner, "Stochastic methods", Springer (2009).
- 12) S. H. Strogatz and R. E. Mirollo, "Stability of incoherence in a population of coupled oscillators" *J. Stat. Phys.* **63**, 613-635 (1991).
- 13) H.-A. Tanaka, H. Nakao, and K. Shinohara, "Self-organizing timing allocation mechanism in distributed wireless sensor networks", *IEICE Electronics Express* **6**, 1562-1568 (2009).
- 14) H. Chiba, "A proof of the Kuramoto conjecture for a bifurcation structure of the infinite-dimensional Kuramoto model", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **35**, 762-834 (2015).
- 15) H. Daido, "Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: bifurcation of the order function", *Physica D* **91**, 24-66 (1996).
- 16) E. Ott and T. M. Antonsen, "Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators", *Chaos* **18**, 037113 (2008).
- 17) S. A. Marvel, R. E. Mirollo, and S. H. Strogatz, "Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action", *Chaos* **19**, 043104 (2009).
- 18) Y. Kawamura *et al.*, "Phase synchronization between collective rhythms of globally coupled oscillator groups: Noiseless nonidentical case", *Chaos* **20**, 043110 (2010).
- 19) D. Pazó, "Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model", *Phys. Rev. E* **72** 046211, (2005).
- 20) H. Sakaguchi and Y. Kuramoto, "A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment", *Prog. Theoret. Phys.* **76** 576-581, (1986).
- 21) Y. Kuramoto and D. Battogtokh, "Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators", *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **5**, 380-385 (2002).
- 22) D. M. Abrams and S. H. Strogatz, "Chimera states for coupled oscillators", *Phys. Rev. Lett.* **93**, 174102 (2004).
- 23) S. H. Strogatz, "Exploring complex networks", *Nature* **410**, 268-276 (2001).
- 24) T. Ichinomiya, "Frequency synchronization in a random oscillator network", *Phys. Rev. E* **70**, 026116 (2004).
- 25) J. G. Restrepo, E. Ott, and B. R. Hunt, "Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators", *Phys. Rev. E* **71**, 036151 (2005).
- 26) H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and S. Oishi, "First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems", *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2104-2107 (1997).
- 27) G. Filatrella, A. H. Nielsen, and N. F. Pedersen, "Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model", *Eur. Phys. J. B* **61**, 485-491 (2008).
- 28) A. E. Motter *et al.*, "Spontaneous synchrony in power-grid networks", *Nat. Phys.* **9**, 191-197 (2013).
- 29) J. L. van Hemmen and W. F. Wreszinski, "Lyapunov function for the Kuramoto model of nonlinearly coupled oscillators", *J. Stat. Phys.* **72**, 145-166 (1993).
- 30) A. Jadbabaie, N. Motee, and M. Barahona, "On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators", *Proc. of the American Control Conference* **5**, 4296-4301 (2004).
- 31) F. Dörfler, M. Chertkov, and F. Bullo, "Synchronization in complex oscillator networks and smart grids", *PNAS* **110**, 2005-2010 (2013).
- 32) T. D. Frank *et al.*, "H-theorem for a mean field model describing coupled oscillator systems under external forces", *Physica D* **150**, 219-236 (2001).
- 33) P. A. Tass, "Phase resetting in medicine and biology: stochastic modelling and data analysis", Springer (2007).

### [著者紹介]

なか おひろ や 中尾裕也君(非会員)



1971 年生。94 年京都大学理学部卒 (主に物理学), 99 年京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻修了。理化学研究所基礎科学特別研究員, 京都大学大学院理学研究科助教などを経て, 2011 年より東京工業大学大学院情報理工学研究科准教授。日本物理学会, 電子情報通信学会, SIAM などの会員。