揺動外力による非線形振動子の同期とクラスタリング *

中尾裕也　　新井賢亮
Hiroya Nakao　　Kensuke Arai

京都大学大学院理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻 [1]
Department of Physics, Kyoto University

1　背景

近年の研究で、単一の動的素子に弱い揺動外力の同一の時系列を繰り返し与えると、出力の**再現性 (reproducibility)** が向上する場合があることが知られている。また、これに等価な状況として、複数の結合していない同等な動的素子群に共通の弱い揺動外力を与えると、それらが**同期 (synchronization)** する場合があることも知られている。これらの現象は、電気回路、レーザー発振、神経細胞、生態学における個体数の変動等、非常に広範な対象に共通に見られるものであり、何らかの普遍的なメカニズムの存在が予想される

例えばラットの新皮質の神経細胞を用いた通電実験において、細胞に一定の電流入力を与えた場合、その膜電位スパイクの発生タイミングは各種の揺らぎのため実験の試行ごとに大きく異なるが、変動する電流入力を与えた場合、スパイクの生成タイミングが試行間で精度良く一致し、再現性が向上することが知られている [1]。レーザー発振実験においても、一定の外部入力ではなくカオス的あるいはノイズ的な変動入力を与えると、出力信号のプロファイルがよく一致する場合があることが知られている [2]。また、以下でも述べるように、電気回路の非線形振動に対して、揺動外力として例えばランダムインパルスの同一の時系列を繰り返し与えると、異なる試行間で出力波形を同期させることができる。

この現象に関して、素子がリミットサイクル振動子の場合については、弱い白色ガウスノイズを与えることにより、その詳細によらず常に再現性の向上あるいは同期現象を示すことが最近示された [3]。同様な解析により、揺動外力がランダムなインパルスや電信信号である場合にもやはり同じ現象が生じることも示されている [4]。

今回の発表では、リミットサイクル振動子に揺動外力がランダムなインパルスで与えられる場合について、位相縮約理論と確率微分方程式を用いた定式化を述べ、数値計算および簡単な電気回路実験による例を示す。特に、インパルスを乗法的 (パラメトリック) に与えることにより、振動子集団が単なる同期のみならず、いくつかのグループに自発的に分かれるクラスタリング現象が生じることを明らかにする。カオス振動子系への拡張の試みについても少しだけ触れたい。

2　位相縮約理論による安定性解析

揺動外力としてレート (頻度) λ の Poisson ランダムインパルスを与えた非線形振動子を考える:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}, t)\delta(t - t_n). \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{X}$ は振動子の状態変数、$\boldsymbol{F}$ はその自律的なダイナミクス、$\{t_n\}$ はインパルスを受ける時刻を表し、$\boldsymbol{G}$ はインパルスによって生じる振動子の状態変数への影響を表す。インパルスを受けない時には振動子は単一の安定なリミットサイクル $\boldsymbol{X}_0(t)$ をもつものとする。式 (1) を伊藤解釈し、Poisson 駆動 Markov 過程の確率微分方程式で書き直すと、

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})dt + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})dN(t) \tag{2}$$

で与えられる。$N(t)$ は Poisson 計数プロセスである。

ランダムなインパルスにより同期現象が生じることは、インパルスにより本来中立安定な位相方向への揺らぎが安定化されることを意味する。これをみるために、式 (2) を位相縮約する。位相変数 $\phi(\boldsymbol{X}) \in [0, 2\pi]$ を常に $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot \nabla\phi(\boldsymbol{X}) = \omega$ を満たすように定義して、Poisson 駆動確率過程に対する伊藤公式を適用することにより、

$$d\phi(t) \simeq \omega dt + g(\phi(t))$$

という位相方程式が導出できる。インパルス間隔は十分長いと仮定して、インパルスを受ける際には振動子は常にリミットサイクル $\boldsymbol{X}_0(t)$ 上にいると近似した。ここで

$$g(\phi) = \phi(\boldsymbol{X}_0(\phi) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}_0(\phi))) - \phi$$

はリミットサイクル上の位相 ϕ の位置でインパルスを受けた時に生じる位相の変化を表し、以下これを位相写像と呼ぶ。$g(\phi)$ は位相 ϕ の 2π-周期関数である。

位相 $\phi(t)$ への微小摂動を $\psi(t)$ とする。$\ln|\psi(t)|$ の従う線形化した方程式は、再び伊藤公式を用いることにより、

$$d \ln|\psi(t)| = \ln|1 + g'(\phi(t))|\, dN(t)$$

となる。この式を位相 ϕ の定常分布 $P(\phi)$ で平均すると、位相方向への摂動の安定性を表す Lyapunov 指数 Λ が

$$\Lambda = E[\ln|1 + g'(\phi(t))|] = \lambda \int d\phi P(\phi) \ln|1 + g'(\phi)|$$

で与えられる。インパルスが十分弱ければ、位相 ϕ はリミットサイクル上に一様に分布する、すなわち $P(\phi) \simeq 1/2\pi$。また、インパルスを受けた時の位相の変化も $g(\phi)$ は小さく、$g'(\phi) > -1$ と仮定できる。この時、

$$\begin{aligned}\Lambda &\simeq \frac{\lambda}{2\pi}\int d\phi \ln|1 + g'(\phi)| = \frac{\lambda}{2\pi}\int d\phi \ln\{1 + g'(\phi)\} \\ &\le \frac{\lambda}{2\pi}\int d\phi g'(\phi) = \frac{\lambda}{2\pi}\{g(2\pi) - g(0)\} = 0\end{aligned}$$

となり、Λ は常に 0 以下となることから、位相方向への微小摂動は常に減衰し、ランダムインパルスによる同期

が生じることが分かる。ここで $g(\phi)$ の周期性を用いた。

リミットサイクルが対称な形をしている場合、乗法的にインパルスを与えた場合の位相写像 $g(\phi)$ が (近似的に)2π よりも小さな周期の周期関数となる場合がある。例えば $g(\phi+\pi) \simeq g(\phi)$ となる場合、$\tilde{\phi}(t) = \phi(t)+\pi$ からの摂動を $\tilde{\psi}(t)$ として同様な議論をすると、その Lyapunov 指数もやはり $\Lambda \le 0$ で与えられることが分かる。よって、位相がちょうど π 離れた状態もランダムインパルスによって安定化されるため、振動子集団がふたつのグループに別れるクラスタリング現象を起こす。

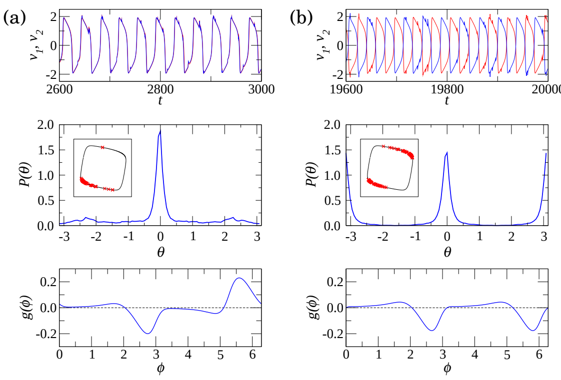

図 1　FitzHugh-南雲振動子集団の同期状態 (a) と 2 クラスタ状態 (b). 上段:ふたつの振動子の時間発展, 中段:位相差の分布関数, 下段:位相写像.

3　数値シミュレーションおよび電気回路実験例

共通ランダムインパルスを受けた FitzHugh-南雲振動子の集団を考える。各々の振動子は以下の式に従う:

$$\dot{u}(t) = \varepsilon(v + c - du) + \xi_u(t)$$

$$\dot{v}(t), = v - v^3/3 - u + I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G(v)\delta(t - t_n) + \xi_v(t).$$

ここでパラメータは $\varepsilon = 0.08$, $c = 0.7$, $d = 0.8$, $I_0 = 0.875$ で、ξ_u, ξ_v は各振動子に独立な微小な白色ガウスノイズを表し、インパルスを加法的 ($G(v) \equiv 0.1$) あるいは乗法的 ($G(v) = 0.1v$) に与える。このパラメータで FitzHugh-南雲振動子のリミットサイクルの形は対称性を持ち、乗法ノイズに対する位相写像 $g(\phi)$ は π-周期性をもつ。実際、図 1 に示すように、加法ノイズに対しては位相写像は 2π-周期的で同期状態 (1 クラスタ状態) が実現され、乗法ノイズに対しては位相写像が π-周期的で 2 クラスタ状態が実現されていることが分かる。

電気回路実験の例として、LED 点滅回路にコンピュータで生成したランダムインパルスの時系列を繰り返し与えて得た結果を図 2 に示す。これまでのところ我々の実験では同期状態しか実現できていないが、リミットサイクルの形状やインパルスの与え方を制御することにより、クラスター状態も実現できるものと考えている。

4　まとめ

以上、リミットサイクル振動子に関しては、位相縮約法を用いることにより、弱いランダムインパルスを与えると、その詳細によらず一般に、再現性の向上あるいは同期現象を示すこと、また、クラスタリング状態を示す場合もあることが分かった。一方、カオス系に関しては、リミットサイクル振動子に対するような位相縮約法は適用できず、一般論の構築は難しい。しかし、強い周期性を持つようなカオス振動子に対しては、定性的にではあるが、同様な考えを適用できる可能性がある。例えば図 3 に示すように、Rössler 振動子 [5] にインパルスを加法的または乗法的に与えることで、noisy ではあるが同期状態、2 クラスタ状態が実現される。このような状況も定式化の拡張によりある程度は取り扱えると思われる。

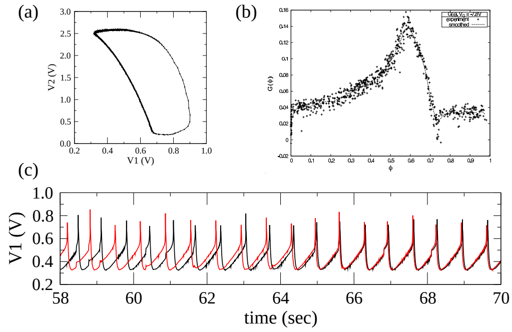

図 2　LED 点滅回路のリミットサイクル (a), 位相写像の例 (b), インパルスによる異なる試行の同期過程 (c).

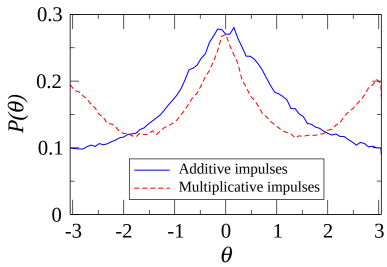

図 3　加法的あるいは乗法的なインパルス入力による Rössler 振動子集団の同期とクラスタリング.

参考文献

[1] Z. F. Mainen and T. J. Sejnowski, Science **268**, 1503 (1995).

[2] A. Uchida, R. McAllister, and R. Roy, Phys. Rev. Lett. **93**, 244102 (2004).

[3] J. N. Teramae and D. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **93**, 204103 (2004); Prog. Theoret. Phys. Suppl. **161**, 360 (2006); H. Nakao, K. Arai, and Y. Kawamura, Phys. Rev. Lett. **98**, 184101 (2007).

[4] K. Nagai, H. Nakao, and Y. Tsubo, Phys. Rev. E **71**, 036217 (2005); H. Nakao, *et al.*, Phys. Rev. E **72**, 026220 (2005); Prog. Theoret. Phys. Suppl. **161**, 294 (2006); K. Arai and H. Nakao, Phys. Rev. E **77**, 036218 (2008).

[5] C. Zhou and J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **88**, 230602-1 (2002).