

Noise-induced synchronization and clustering in ensembles of uncoupled limit-cycle oscillators^{*1}

京都大学大学院理学研究科 物理学教室

中尾裕也^{*2}, 新井賢亮, 河村洋史

概要

結合していないリミットサイクル振動子の集団に共通の白色ガウスノイズを与えると、振動子の詳細によらず、一般に同期現象やクラスタリング現象が生じることを示す。

1 背景

非線形振動子の集団に共通の変動外力を与えると、振動子間に結合がなくても互いに同期することが、種々の実験で示されている [1, 2, 3, 4, 5]. 特にリミットサイクル振動子の共通ノイズ同期に関しては、寺前 & 田中 [6] の先駆的な理論解析により、位相縮約法を用いて、中立安定な同期解が加法的に与えられる共通ノイズにより統計的に線形安定化することが示されている。今回は位相縮約法および平均化法を用いて寺前 & 田中の扱った状況を一般化し、共通成分および独立成分の両方を持つノイズを、加法的あるいは乗法的に与えられた振動子集団の位相差の定常分布関数を直接導出する。これにより、振動子間の位相差が、振動子の位相感受性と共通ノイズへの結合の仕方によって決まるようなピークを常にひとつ以上持つこと、すなわち共通ノイズ成分によって同期やクラスタリングが常に引き起こされることを解析的に示し、数値計算による具体例を示す。

2 モデル

以下の Langevin 方程式で記述される、 N 個の結合していない同種のリミットサイクル振動子が、全ての振動子に共通に与えられるノイズと、個々の振動子に独立に与えられるノイズの両方を受けている状況を考える：

$$\dot{X}^{(\alpha)}(t) = F(X^{(\alpha)}) + \sqrt{D}G(X^{(\alpha)})\xi(t) + \sqrt{\epsilon}H(X^{(\alpha)})\eta^{(\alpha)}(t). \quad (1)$$

ここで $\alpha = 1, \dots, N$ は振動子の番号を表し、 $X^{(\alpha)}(t) \in \mathbf{R}^M$ は α 番目の振動子の時刻 t における状態、 $F(X^{(\alpha)}) \in \mathbf{R}^M$ はその固有のダイナミクス、 $\xi(t) \in \mathbf{R}^M$ は共通ノイズ、 $\eta^{(\alpha)}(t) \in \mathbf{R}^M$ は独立ノイズを表す。ノイズがない場合、各々の振動子は安定なリミットサイクル解 $X_0(t)$ を持つとする。 $\xi(t)$ と $\eta^{(\alpha)}(t)$ は各成分が互いに独立な単位強度の白色 Gauss ノイズであり、パラメータ D と ϵ でそれらの影響をコントロールする。 $G(X^{(\alpha)})$ と $H(X^{(\alpha)})$ は $X^{(\alpha)}$ に滑らかに依存する $\mathbf{R}^{M \times M}$ 行列で、振動子の各々のノイズへの結合の仕方を表す。以下、この Langevin 方程式を Stratonovich 解釈する。

3 位相縮約, 平均化

リミットサイクル $X_0(t)$ とその近傍に等角速度で増加する位相 $\phi(t) = \phi(X(t)) \in [-\pi, \pi]$ を定義する。与えられるノイズが弱いとして、式 (1) を位相縮約 [7, 8] すると、 N 個の振動子の位相のベクトル

^{*1} H. Nakao, K. Arai, and Y. Kawamura, Phys. Rev. Lett. **98** 184101 (2007).

^{*2} 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 Tel./Fax: 075-753-3742 E-mail: nakao@ton.scphys.kyoto-u.ac.jp

$\phi = (\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(N)})$ の発展は近似的に以下の Langevin 方程式で与えられる:

$$\dot{\phi}^{(\alpha)}(t) = \omega + \sqrt{D} \mathbf{Z}(\phi^{(\alpha)}) \cdot \mathbf{G}(\phi^{(\alpha)}) \boldsymbol{\xi}(t) + \sqrt{\epsilon} \mathbf{Z}(\phi^{(\alpha)}) \cdot \mathbf{H}(\phi^{(\alpha)}) \boldsymbol{\eta}^{(\alpha)}(t). \quad (2)$$

ここで ω は振動子の自然角振動数で, $\mathbf{G}(\phi^{(\alpha)}) = \mathbf{G}(\mathbf{X}_0(\phi^{(\alpha)}))$, $\mathbf{H}(\phi^{(\alpha)}) = \mathbf{H}(\mathbf{X}_0(\phi^{(\alpha)}))$ である. $\mathbf{Z}(\phi^{(\alpha)}) = \nabla_{\mathbf{X}} \phi^{(\alpha)}|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(\phi^{(\alpha)})} \in \mathbf{R}^M$ は位相感受関数 [7, 8] で, 以下 $\mathbf{Z}(\phi) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}_0(\phi)) \equiv \omega$ となるように規格化する. $\mathbf{Z}(\phi)$, $\mathbf{G}(\phi)$, $\mathbf{H}(\phi)$ は位相 ϕ の滑らかな周期関数となる. 位相ベクトル ϕ の確率密度関数 (PDF) $P(\phi, t)$ の従う Fokker-Planck 方程式 (FPE) は, 式 (2) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\phi, t) &= - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \phi^{(\alpha)}} \left(A^{(\alpha)}(\phi) P \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \phi^{(\alpha)} \partial \phi^{(\beta)}} \left(C^{(\alpha, \beta)}(\phi) P \right), \\ A^{(\alpha)}(\phi) &= \omega + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \phi^{(\alpha)}} C^{(\alpha, \beta)}(\phi), \\ C^{(\alpha, \beta)}(\phi) &= D \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=1}^M Z_i(\phi^{(\alpha)}) G_{ik}(\phi^{(\alpha)}) \right) \left(\sum_{j=1}^M Z_j(\phi^{(\beta)}) G_{jk}(\phi^{(\beta)}) \right) \\ &\quad + \epsilon \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=1}^M Z_i(\phi^{(\alpha)}) H_{ik}(\phi^{(\alpha)}) \right) \left(\sum_{j=1}^M Z_j(\phi^{(\beta)}) H_{jk}(\phi^{(\beta)}) \right) \delta_{\alpha, \beta} \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる.

次に式 (3) に対して平均化近似を行う [7]. ゆっくり変化する新しい位相 $\psi^{(\alpha)} = \phi^{(\alpha)} - \omega t$ ($\alpha = 1, \dots, N$) を導入し, そのベクトル $\psi = (\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(N)})$ の PDF を $Q(\psi, t) = Q(\{\psi^{(\alpha)}\}, t) = P(\{\phi^{(\alpha)} = \omega t + \psi^{(\alpha)}\}, t)$ として, 周期 $T = 2\pi/\omega$ の区間で平均化する. $Q(\psi, t)$ の従う平均化された FPE は

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(\psi, t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \psi^{(\alpha)} \partial \psi^{(\beta)}} \left(D^{(\alpha, \beta)}(\psi) Q \right) \quad (4)$$

という形で, 係数 $D^{(\alpha, \beta)}(\psi)$ は

$$\begin{aligned} D^{(\alpha, \beta)}(\psi) &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} C^{(\alpha, \beta)}(\{\phi^{(\alpha)} = \omega t' + \psi^{(\alpha)}\}) dt' \\ &= Dg(\psi^{(\alpha)} - \psi^{(\beta)}) + \epsilon h(0) \delta_{\alpha, \beta} \end{aligned} \quad (5)$$

と計算される. ここで, $g(\theta)$, $h(\theta)$ は以下に定義される位相感受性とノイズへの結合関数の相関関数である:

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i, j, k=1}^M Z_i(\phi') G_{ik}(\phi') Z_j(\phi' + \theta) G_{jk}(\phi' + \theta) d\phi', \\ h(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i, j, k=1}^M Z_i(\phi') H_{ik}(\phi') Z_j(\phi' + \theta) H_{jk}(\phi' + \theta) d\phi'. \end{aligned} \quad (6)$$

4 位相差の分布

振動子間の位相差の関係を見るために, 系の 2 体 PDF

$$R(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, t) = \int d\psi^{(3)} \dots d\psi^{(N)} Q(\psi, t) \quad (7)$$

を考え (一般性を失わずに $\psi^{(1)}$ と $\psi^{(2)}$ に着目する), さらに変数を位相 $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ から平均位相と位相差

$$\psi = (\psi^{(1)} + \psi^{(2)})/2, \quad \theta = \psi^{(1)} - \psi^{(2)} \quad (8)$$

に変換し, それらの PDF を $S(\psi, t)$ と $U(\theta, t)$ とし $R(\psi^{(1)} = \psi + \theta/2, \psi^{(2)} = \psi - \theta/2, t) = S(\psi, t)U(\theta, t)$ と変数分離すると, $S(\psi, t)$ と $U(\theta, t)$ は以下の方程式に従う:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S(\psi, t) &= \frac{1}{4} \{D[g(0) + g(\theta)] + \epsilon h(0)\} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} S(\psi, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} U(\theta, t) &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \{D[g(0) - g(\theta)] + \epsilon h(0)\} U(\theta, t). \end{aligned} \quad (9)$$

平均位相 ψ の定常 PDF は $S_0(\psi) \equiv 1/2\pi$ となり, リミットサイクル上に一様に分布する. 一方, 位相差 θ の定常 PDF は

$$U_0(\theta) = \frac{u_0}{D[g(0) - g(\theta)] + \epsilon h(0)} \quad (10)$$

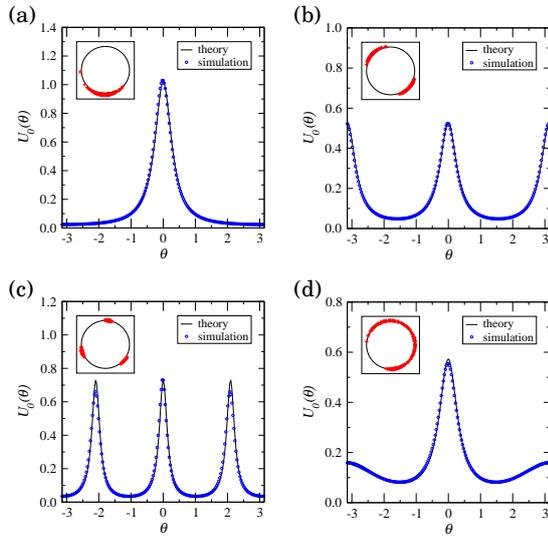
となる. ここで u_0 は規格化条件で決まる定数である.

5 共通ノイズによる同期現象およびクラスタリング現象

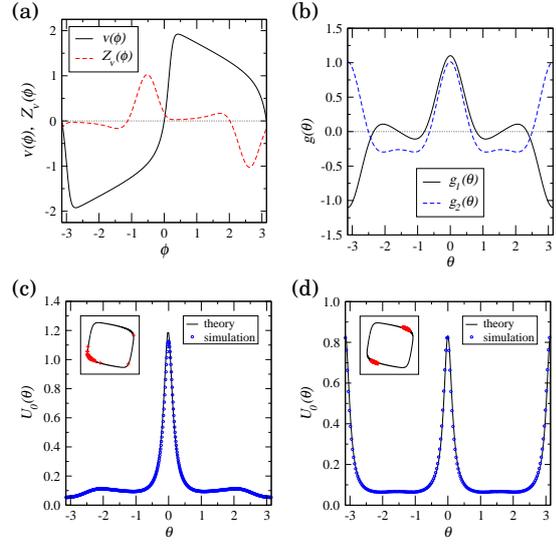
得られた計算結果を物理的に解釈する. 以下の議論は, 条件を満たす $g(\theta)$ に対して一般的に成立する. 相関関数 $g(\theta)$ は各々 ϕ' に周期的で滑らかに依存する位相感受関数 $Z_i(\phi')$ とノイズとの結合関数 $G_{ik}(\phi')$ の畳み込みなので, $g(\theta)$ も θ の滑らかな周期関数であり, $\theta = 0$ で最大値を取る $g(0) \geq g(\theta)$ である. 以下の例で示すように, ノイズとの結合関数 $G_{ik}(\phi')$ が単なる定数ではない場合, $g(\theta)$ は原点 $\theta = 0$ 以外にも複数のピークを持つこともある. まず, 共通ノイズのみで独立ノイズがない場合 ($D > 0, \epsilon = 0$), $U_0(\theta)$ は $\theta = 0$ で正の方向に発散し, 振動子間の位相差は $\theta = 0$ に集中する. すなわち, 共通ノイズによる同期現象が生じる. 独立ノイズの強度 ϵ が増加すると, $U_0(\theta)$ は徐々に広がるが, やはり $\theta = 0$ のピークは, $D > 0$ である限り存在する. つまり, 共通ノイズが存在すれば, その程度は ϵ の値に依存するが, 必ず振動子間の位相差は $\theta = 0$ の近傍に集まる. $g(\theta)$ が $\theta = 0$ 以外にもピークを持つ場合, $U_0(\theta)$ はそれらの点でも $\theta = 0$ と同様にピークを持つ. その場合, 以下の例で示すように, ノイズによる完全同期だけではなく, クラスタリング現象も生じうる.

6 具体例

最初の例として結合していない Stuart-Landau 振動子の集団を考え [7], $\mathbf{X} = (x, y)$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (x - c_0 y - (x^2 + y^2)(x - c_2 y), y + c_0 x - (x^2 + y^2)(y + c_2 x))$ とする. 独立ノイズとの結合は加法的だとして $\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \text{diag}(1, 1)$ とおき, 共通ノイズとの結合としては, 以下の 4 種類の加法的あるいは乗法的な結合を考える: $\mathbf{G}_1(\mathbf{X}) = \text{diag}(1, 1)$, $\mathbf{G}_2(\mathbf{X}) = \text{diag}(x, y)$, $\mathbf{G}_3(\mathbf{X}) = \text{diag}(1 + 4xy, 0)$, $\mathbf{G}_4(\mathbf{X}) = \text{diag}(x, xy)$. パラメータを $c_0 = 2, c_2 = -1$ とすると自然角振動数は $\omega = c_0 - c_2 = 3$ となり, 位相感受関数は $Z(\phi) = \sqrt{2}(\sin(\phi + 3\pi/4), \sin(\phi + \pi/4))$ で与えられる [7]. 式 (6) より, 対応する相関関数は $g_1(\theta) = 2 \cos \theta$, $g_2(\theta) = \cos^2 \theta$, $g_3(\theta) = \cos 3\theta$, $g_4(\theta) = (\cos \theta + 8 \cos^2 \theta + \cos 3\theta)/16$, $h(0) = 2$ と計算され, これらより位相差の定常 PDF $U_0(\theta)$ が得られる. つまり, ノイジーな同期状態 (1 クラスタ状態), 2 クラスタ状態, 3 クラスタ状態, および混合状態が生じることが予想される. 左図 (a)-(d) は $N = 200$ 個の振動子系の数値計算結果を $D = 0.002, \epsilon = 0.0001$ の場合について上記の理論の結果と比較したもので, よく一致していることが分かる.



Stuart-Landau 振動子の結果. (a) 同期, (b) 2 クラスタ, (c) 3 クラスタ, (d) 混合状態.



FitzHugh-南雲振動子の結果. (a) $v(\phi)$ と $Z_v(\phi)$, (b) $g_1(\theta)$ と $g_2(\theta)$, (c) 同期状態, (d) 2 クラスタ状態.

ふたつ目の例として, 結合していない FitzHugh-南雲神経振動子 [8] の集団を考える: $X = (u, v)$, $F(X) = (\varepsilon(v + c - du), v - v^3/3 - u + I)$. 膜電位に対応する変数 v に対して, 加法的あるいは乗法的な共通ノイズと, 加法的な独立ノイズを与える: $G(X) = \text{diag}(0, 1)$ あるいは $G(X) = \text{diag}(0, v)$, $H(X) = \text{diag}(0, 1)$. パラメータは $\varepsilon = 0.08$, $c = 0.7$, $d = 0.8$, $I = 0.875$ とする. このとき, リミットサイクルはほぼ対称な形となり, 自然角振動数は $\omega \simeq 0.1725$ となる. 位相感受関数 $Z_v(\phi)$ は, 文献 [8] に示されている方法で計算した. 右図 (a)-(d) は $N = 200$ 個の振動子に対して, $D = 0.005$, $\epsilon = 0.0005$ として数値計算した結果を比較したもので, それぞれの共通ノイズの与え方に対応して, 同期状態あるいは 2 クラスタ状態が生じていることが分かる.

参考文献

- [1] Z. F. Mainen and T. J. Sejnowski, *Science* **268**, 1503 (1995).
- [2] R. F. Galán, N. Fourcaud-Trocmé, G. B. Ermentrout, and N. N. Urban, *J. Neurosci.* **26**, 3646 (2006).
- [3] A. Uchida, R. McAllister, and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 244102 (2004).
- [4] K. Yoshida, K. Sato, A. Sugamaga, *J. Sound and Vibration* **290**, 34 (2006).
- [5] K. Arai and H. Nakao, *Proceedings of NOLTA2006*, held in Bologna, Italy, 2006.
- [6] J. N. Teramae and D. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 204103 (2004); *Prog. Theoret. Phys. Suppl.* **161**, 360 (2006).
- [7] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [8] E. M. Izhikevich, “Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting”, MIT press (Estimated publication date: July 2006).
- [9] L. Arnold, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications* (John Wiley & Sons, New York, 1974).