

非線形振動子の位相縮約理論とその応用

中尾 裕也*

2009年4月10日

* この文章は、システム制御情報学会発行の「システム/制御/情報」の解説記事用に書いた原稿をもとにしたものです。随時内容を増補・改訂してゆきたいと思います。

1 はじめに

電気回路や化学反応、心筋細胞や神経細胞、蛍の発光や蛙の鳴き声、歩行者の歩調、生物の概日リズムなど、自律的なダイナミクスを持つ要素とその多体結合系は、実世界の至る所に見られる [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. 本解説では、自律要素の典型であるリミットサイクル振動子で構成される系の強力な解析手法である位相縮約理論について紹介する。位相縮約理論は、多次元の力学系で記述されるリミットサイクル振動子からなる系を、相互作用が弱いなどの適当な条件下で、振動子の位相のみを用いた位相モデルで近似的に記述するための数理的枠組みである。位相縮約理論の歴史は古く、1967年の Winfree の解析とそれに続く蔵本の解析によって基礎的な部分は 1970 年代にほぼ確立され、Belousov-Zhabotinsky 振動化学反応系の時空パターンの解析などに大きな役割を果たした [1, 2, 3].

位相モデルの研究は、1980 年代–90 年代にカオス力学系および複雑系の研究が流行していた間は下火となっていたが、近年、再び注目されるようになった。その理由は、位相縮約理論が、近年の実験・測定技術の向上によって得られるようになった多種多様なリズム現象に関する情報を、定性・定量の両面から統一的に把握するひとつの切り口を与えるからだろう。振動子の個性は振動数と位相応答関数に要約され、現象を記述する多次元モデルが定量性を保ちつつ簡潔な位相モデルに縮約されて、詳しい解析が可能となる。この特徴により、位相縮約理論は、当初の主たる対象であった非平衡物理・化学系の枠を超え、生命科学から工学に至る広範な分野の問題に適用されるようになった。現在では、各種の生物細胞など様々な実験系で実際に位相応答関数が測定され、要素間の相互作用にも現実的なネットワーク構造が採り入れられて、より詳細な解析が行われるようになっている。

本解説では、位相や位相応答関数の定義、位相モデルの導出法などを説明し、標準的な例として周期外力への振動子間の同期や結合振動子系の相互同期について述べる。また最近の話題として、共

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学理学部物理学教室

通ノイズによる振動子の同期や複雑ネットワーク上の振動子系の挙動を紹介する。

2 リミットサイクル振動子

今後、安定なリミットサイクル解を持ち周期的なダイナミクスを示す力学系を単に振動子と呼ぶ。定常電流を受けた神経細胞の規則的なスパイク発火 [1, 4], 自転車等につける LED 点滅ライト, メトロノームや受動歩行するロボットの脚の周期的挙動 [8] などは, リミットサイクル振動の典型であろう。振動子の状態は M 個の変数で表されるとして, ベクトルで $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m) \in \mathbf{R}^M$ と書く。振動子のダイナミクスは, 常微分方程式

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

で記述されるとする。 t は時刻で $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^M$ はダイナミクスを表すベクトル場である。この力学系は, 相空間にひとつの安定なリミットサイクル解 $\mathbf{X}_0(t)$ を持ち, その吸引領域 (basin) 内の任意の点から出発した軌道は $\mathbf{X}_0(t)$ に漸近するものとする。リミットサイクルの周期を T , 振動数を $\omega = 2\pi/T$ と書く。 $\mathbf{X}_0(t+T) = \mathbf{X}_0(t)$ である。

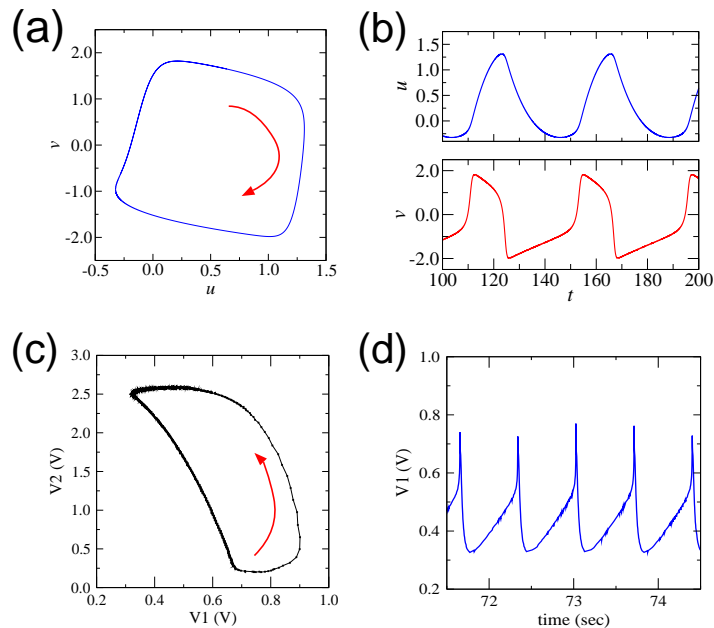


図1 (a), (b): FitzHugh-南雲モデルのリミットサイクル振動解 ($\epsilon = 0.08, a = 0.7, b = 0.8, I = 0.4$). (u, v) 相空間におけるリミットサイクル軌道 (a) と u, v の時系列 (b). (c), (d): LED 点滅回路のリミットサイクル振動. 回路の適当な 2 カ所で電位 (V_1, V_2) を測定. (V_1, V_2) 平面での軌道 (c) と V_1 の時系列 (d).

例えば神経細胞の発火活動の簡単なモデルである FitzHugh-南雲 (FHN) モデル [1] は, 状態変数を $\mathbf{X} = (u, v)$ として, $\dot{u}(t) = \epsilon(v + a - bu)$, $\dot{v}(t) = v - v^3/3 - u + I$ に従う。 v は細胞の膜電位, u は細胞膜のイオンチャンネル等の効果を簡略化したものを表す。このモデルはパラメータ

ϵ, a, b, I の適当な範囲でリミットサイクル解を持つ (図 1(a), (b)). また, LED の点滅回路で実験的に測定されたリミットサイクルの例を図 1(c), (d) に示す.

3 振動子の位相と位相応答関数

相空間の安定なリミットサイクルとその吸引領域には位相を導入できる. 位相縮約理論では Winfree によって導入された自然な位相の定義が使われ, そこから振動子の特徴づけに重要な役割を果たすアイソクロンの概念や位相応答関数などが導出される [1, 2, 3].

3.1 位相の定義

位相は振動子の状態ベクトル $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^M$ から実数 $\theta \in [0, 2\pi)$ への写像 $\theta(\mathbf{X})$ である. リミットサイクル上に適当に位相の原点をとり, そこから出発した振動子の状態 $\mathbf{X}(t)$ がリミットサイクルに沿って一周すると, 位相 $\theta(t) = \theta(\mathbf{X}(t))$ は 0 から 2π まで増加するものとする (位相の範囲を $[0, 1)$ や $[0, T)$ に取ることも多い). 振動子の状態がリミットサイクル上を運動する速さは一様ではないが, 位相の定義 (目盛りの振り方) の任意性を利用して, $\theta(t)$ が常に一定の振動数 $\omega = 2\pi/T$ で増加するようにとると便利である (図 2(a), (b)).

振動子が摂動を受けると, その状態は一時的にリミットサイクルから外れるため, リミットサイクル外部にも位相の定義を拡張する必要がある. リミットサイクルの吸引領域内から出発した軌道はいずれリミットサイクルに漸近するのだから, 同一の状態に収束する出発点の集合は, もともと同じ位相を持っていると見なすことにする. これにより相空間にアイソクロン (isochron, 等位相面) が定義される (図 2(c), (d)).

以上のことを数式で表現すると, 位相の時間発展は $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\mathbf{X}(t)) = \text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t) = \text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X})$ と書けるので, リミットサイクルとその吸引領域の任意の点で $\text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \omega$ が成立するように位相の場 $\theta(\mathbf{X})$ を定義すれば, 常に $\dot{\theta}(t) = \omega$ となる. ここで $\text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X}) = (\partial\theta/\partial X_1, \dots, \partial\theta/\partial X_m)$ は位相場 $\theta(\mathbf{X})$ の勾配ベクトルである. この定義は一見複雑だが, 実際には単に振動子のダイナミクスを走らせて位相の原点を通過するまでの時間を測定することに帰着できる.

3.2 位相の測定方法

リミットサイクルの解析解が得られることは稀であり, アイソクロンの解析的表式も通常は得られない. しかし実験や数値シミュレーションでは, 以下に述べるような簡単な方法で振動子の位相を測定できる.

まずリミットサイクル上に位相 θ を導入する. リミットサイクル上の点 \mathbf{X}_0 から出発した軌道が位相の原点を最初に通過するまでに時間 τ ($0 < \tau \leq T$) かかるとしたら, 出発点の位相 $\theta = \theta(\mathbf{X}_0)$ は $\theta + \omega\tau = 2\pi$ より $\theta = 2\pi - \omega\tau = 2\pi(1 - \tau/T)$ で与えられる. 次に, リミットサイクルから外れた点 \mathbf{X} の位相を知るには, \mathbf{X} から軌道を出発させ, リミットサイクルの周期 T の整数倍の nT

時間走らせて、リミットサイクル上に戻るまで十分に緩和させればよい。緩和した先のリミットサイクル上の点の位相が θ ならば、出発点 \mathbf{X} の位相も θ であったことになる (回転数を考慮に入れば $\theta - 2\pi n$ である)。

なお、実験では振動子の変数の一部しか観測できないこともあるが、振動子がリミットサイクル上の位相の原点を通過したことを何らかの基準で判定できれば、原理的には一本の信号からでも与えられた状態の位相を知る事ができる。FHN モデルにおいて相空間の各点 (u, v) で網羅的に求めた位相場 $\theta(u, v)$ を図 2(d) に示す。

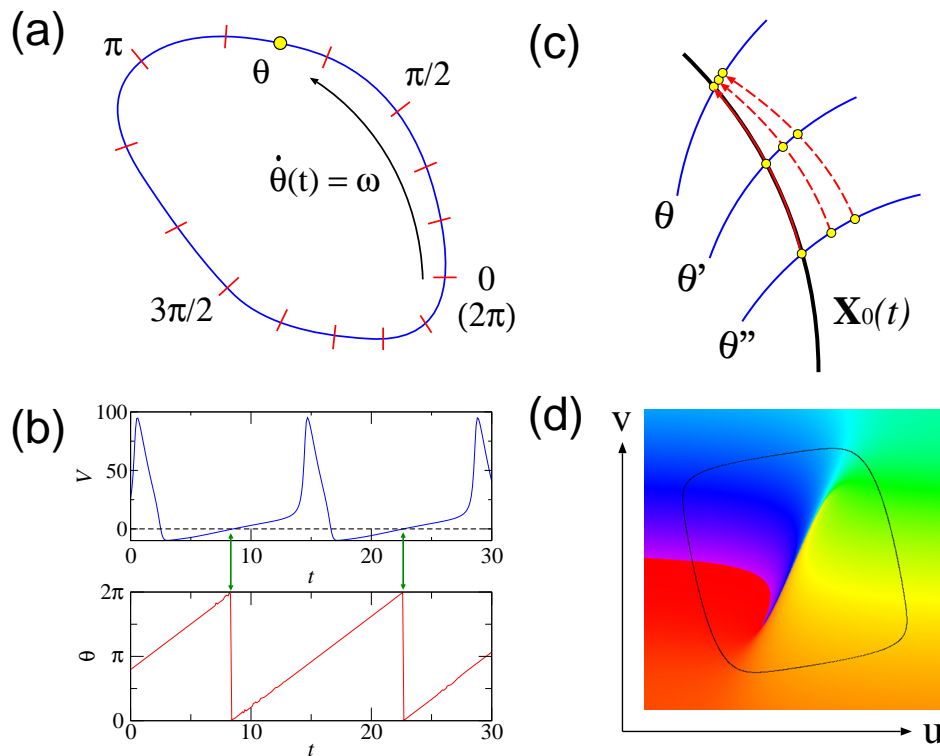


図 2 (a): リミットサイクル上への位相の導入, (b): 振動子のもとの変数と対応する位相の時間発展, (c): 相空間への拡張 (アイソクロンの導入), (d): FHN モデルの位相場 $\theta(u, v)$ の濃淡プロット。

3.3 位相応答関数と位相感受関数

振動子のインパルス刺激への応答を考えよう。振動子がリミットサイクル上の位相 θ を持つ状態 $\mathbf{X}_0(\theta)$ において摂動 $\mathbf{I} (\in \mathbf{R}^M)$ を受け、リミットサイクル吸引領域内の状態 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(\theta) + \mathbf{I}$ に飛ばされたとしよう。飛ばされた先の点 \mathbf{X} の位相は $\theta(\mathbf{X})$ で与えられ、やがてリミットサイクル上の対応する状態に漸近してゆく (図 3(a))。この過程で生じる刺激を与えない場合からの位相の変化は、

$$g(\theta; \mathbf{I}) = \theta(\mathbf{X}_0(\theta) + \mathbf{I}) - \theta \quad (\in \mathbf{R})$$

となる。この $g(\theta; \mathbf{I})$ を振動子の位相応答関数 (phase response function) と呼ぶ^{*1}。 $g(\theta; \mathbf{I})$ は一般に θ の 2π 周期関数で摂動 \mathbf{I} の非線形関数だが、特に摂動の大きさ $|\mathbf{I}|$ が十分に小さい時に線形近似すると

$$g(\theta; \mathbf{I}) \simeq \text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(\theta)} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{I}$$

となる。ここで微小な \mathbf{I} に対する位相の線形応答係数を

$$\mathbf{Z}(\theta) = \text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(\theta)} \quad (\in \mathbf{R}^M)$$

と書いた。これを位相感受関数 (phase sensitivity function) と呼び、リミットサイクル直上での位相場 $\theta(\mathbf{X})$ の勾配を表す。位相縮約理論では振動子の個性は位相応答関数 $g(\theta; \mathbf{I})$ に要約される。特に、以下で述べる弱結合系の解析では位相感受関数 $\mathbf{Z}(\theta)$ が重要である。FHN モデルの位相感受関数 $\mathbf{Z}(\theta) = (Z_u(\theta), Z_v(\theta))$ の例を図 3(b) に示す。

実際に $g(\theta; \mathbf{I})$ を求めるには、振動子に様々な位相 θ でインパルス刺激 \mathbf{I} を与えて緩和させ、刺激を与えなかった場合との位相の変化を測定すればよい (図 3(c))。 $\mathbf{Z}(\theta)$ も状態変数の成分毎に独立に微小刺激を与えれば原理的には測定できる。ただし、実験では振動子の全ての変数を刺激できるとは限らない。また、 $g(\theta; \mathbf{I})$ が測定ノイズに埋もれない程度に強い刺激を与える必要があるため、線形近似が悪くなって $\mathbf{Z}(\theta)$ の正確な推定が難しいこともある。数値的に $\mathbf{Z}(\theta)$ を求めるには、上記の直接刺激法よりも式 (1) の線形化方程式の随伴行列を用いた Malkin の定理に基づく方法が便利である [4]。

4 外力に駆動される振動子系

位相縮約理論を用いて弱い外力を受けたリミットサイクル振動子系を記述する位相方程式を導出し、その例として、周期外力への振動子の同期と、共通ノイズを受けた振動子間に生じる同期について述べる。

4.1 位相縮約

振動子が弱い摂動外力に駆動される状況を考えよう:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \varepsilon \mathbf{p}(\mathbf{X}, t).$$

ここで $\mathbf{p}(\mathbf{X}, t)$ は振動子の状態 \mathbf{X} と時刻 t に依存する摂動を表し、 ε は摂動の強度を示す微小パラメータである。位相のダイナミクスは $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\mathbf{X}(t)) = \text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t) = \text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X}) \cdot \{\mathbf{F}(\mathbf{X}) + \varepsilon \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)\} = \omega + \varepsilon \text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)$ と書けるが、これはまだ位相 θ で閉じた式ではない。ここで、摂動が十分に弱く、振動子の状態が常にリミットサイクル近傍にあると考えて、式中の

^{*1} $g(\theta; \mathbf{I})$ は Winfree [1] に従って位相リセット関数 (phase resetting function) と呼ばれることも多い。一方、 $\mathbf{Z}(\theta)$ も位相応答関数と呼ばれることがあるが、これは定義より位相の応答そのものではなく、微小摂動に対する線形応答係数であることに注意。

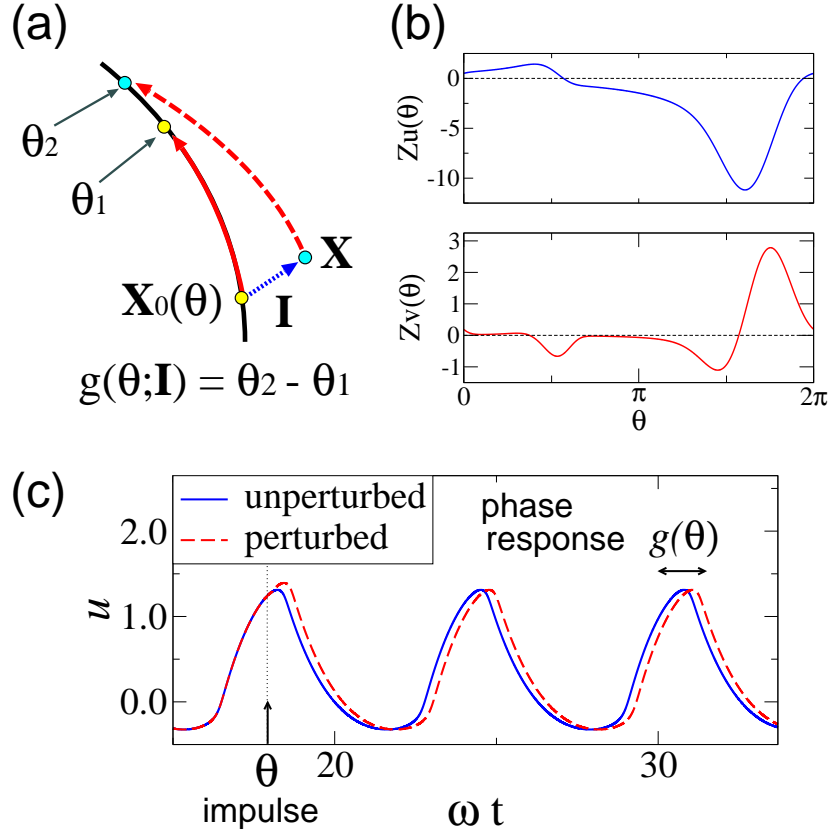


図3 (a): インパルス摂動への位相応答 (相空間でのダイナミクス). (b): FHN モデルの位相感受関数 $\mathbf{Z}(\theta) = (Z_u(\theta), Z_v(\theta))$. (c): インパルス刺激による時系列のずれからの位相感受関数 $g(\theta)$ の測定.

\mathbf{X} をそれと同じ位相 $\theta = \theta(\mathbf{X})$ を持つ (同じアイソクロン上にある) リミットサイクル上の $\mathbf{X}_0(\theta)$ で置き換え, $\text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)$ を $\text{grad}_{\mathbf{X}}\theta(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(\theta)} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{X}_0(\theta), t)$ と近似すると,

$$\dot{\theta}(t) = \omega + \varepsilon \mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{p}(\theta, t) \quad (2)$$

と θ で閉じた方程式が得られる. ここで $\mathbf{p}(\mathbf{X}_0(\theta), t) = \mathbf{p}(\theta, t)$ と略記し, 位相感受関数 $\mathbf{Z}(\theta)$ を用いた.

4.2 周期外力への振動子の同期

外力が時刻 t について周期的だとして, その周期を T_{ext} , 振動数を $\Omega = 2\pi/T_{ext}$ とする. $\mathbf{p}(\mathbf{X}, t+T_{ext}) = \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)$ である. 外力の振動数 Ω と振動子の振動数 ω が近く, その差が外力の強さ ε 程度だとして, $\varepsilon\Delta = \omega - \Omega$ とおく. 振動子の位相 θ から外力の位相 Ωt を引いた位相差 $\phi = \theta - \Omega t$ を導入すると, ϕ は $\dot{\phi}(t) = \omega - \Omega + \varepsilon \mathbf{Z}(\phi + \Omega t) \cdot \mathbf{p}(\phi + \Omega t, t) = \varepsilon \{\Delta + \mathbf{Z}(\phi + \Omega t) \cdot \mathbf{p}(\phi + \Omega t, t)\}$ という式に従う. この式の右辺は $O(\varepsilon)$ なので ϕ の変化は遅い. そこで, ϕ が外力の周期 T_{ext} 程度の時間ではあまり変化しないと仮定して, ϕ を時刻 t での値に固定し, 右辺を外力の速い振動成分

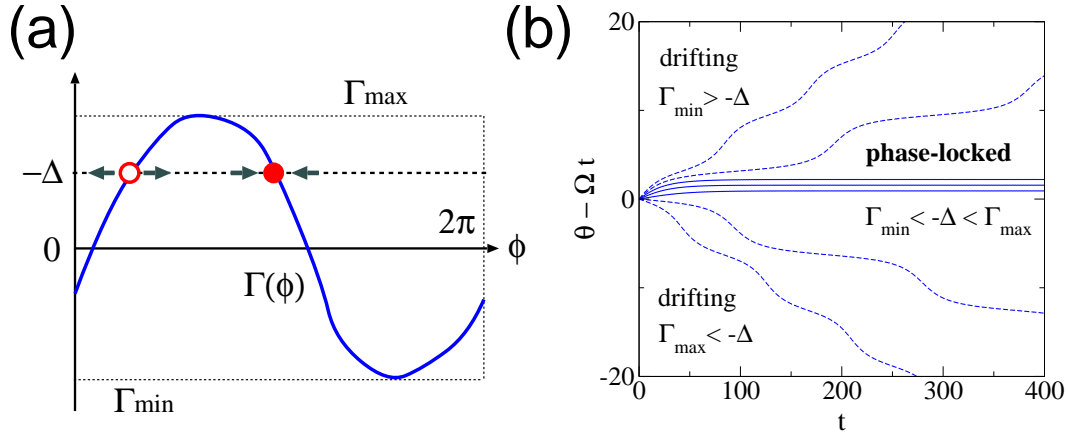


図4 周期外力に駆動される振動子の外力との位相差のダイナミクス. (a): 外力への位相結合関数 $\Gamma(\phi)$. 振動数の差 $-\Delta$ が適当な範囲にあれば位相差のダイナミクスは安定な固定点 (右側の丸) を持つ. (b): 異なる振動数を持ついくつかの振動子の外力との位相差の時間発展. $|\Delta|$ が小さいものは外力に位相ロックし, 大きいものはドリフトを続ける.

Ωt について一周期にわたって平均化 (averaging) する近似を行うと,

$$\dot{\phi}(t) \simeq \varepsilon\{\Delta + \Gamma(\phi)\} \quad (3)$$

という簡単な方程式が得られる*2. ここで振動子の外力への位相結合関数 (phase coupling function) $\Gamma(\phi)$ は

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi) &= \frac{1}{T_{ext}} \int_t^{t+T_{ext}} \mathbf{Z}(\phi + \Omega t') \cdot \mathbf{p}(\phi + \Omega t', t') dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{Z}(\phi + \psi) \cdot \mathbf{p}\left(\phi + \psi, \frac{\psi}{\Omega}\right) d\psi \end{aligned}$$

で与えられる 2π 周期関数である. 式 (3) は $\min \Gamma(\phi) < -\Delta < \max \Gamma(\phi)$ ならば $\dot{\phi}(t) = 0$ となる固定点を少なくともふたつ持ち, どちらかが安定なことがわかる (図 4(a)). よって, 位相差 $\phi = \theta - \Omega t$ は安定な固定点にロックされ, 振動子は外力に同期する. 一方, $|\Delta|$ が大き過ぎて $\dot{\phi}(t) = 0$ を満たす解がない場合, 振動子は外力に同期できず, ϕ はドリフト (増加または減少) を続ける (図 4(b)). この議論は ω と Ω が有理数比に近い場合に拡張できて, 一般に m 対 n の同期が生じることを示せる.

4.3 共通ノイズに駆動される振動子間の同期

最近の話題として, 結合のない複数の振動子間に弱い共通ノイズによって生じる同期現象を紹介する. 寺前-田中 [9] は位相縮約理論を用いることにより, この現象が任意のリミットサイクルで生

*2 より正確に述べると, 平均化後の位相方程式 (3) の位相 (区別して $\bar{\phi}(t)$ と書く) は平均化前の位相 $\phi(t)$ とは $O(\varepsilon)$ 程度の差があり, $\phi = \bar{\phi} + \varepsilon h(\bar{\phi}, t)$ という形の near identity transformation で対応づけられる [4].

じることを明らかにした。簡単のため、振動子の一変数のみにリミットサイクルへの緩和時間より長い相関時間を持つノイズが与えられているとして、位相縮約してから白色ノイズ極限を取ると、

$$\dot{\theta}(t) = \omega + \varepsilon Z(\theta)\xi(t) \quad (4)$$

という形の位相方程式が得られる [9]。これは決定論的な方程式ではなく Stratonovich 型の Langevin 方程式 [10] であり、 $Z(\theta)$ は外力を受ける成分の位相感受関数、 $\xi(t)$ は $\langle \xi(t) \rangle = 0$ 、 $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = 2\delta(t-s)$ をみたす白色ガウスノイズである。 $\langle \dots \rangle$ はノイズに関する平均を表す。

式 (4) に従うふたつの振動子を考え、位相を θ, θ' として、位相差 $\phi = \theta' - \theta$ が微小な場合を考える。共通ノイズ $\xi(t)$ の効果で ϕ が拡大するか縮小するかを見るため、その線形成長率である平均 Lyapunov 指数 $\Lambda = \langle d \ln |\phi(t)| / dt \rangle$ に注目しよう。微小な位相差は線形近似の範囲では $\phi(t) \sim e^{\Lambda t}$ のように振る舞うので、 $\Lambda < 0$ なら位相差は縮小する。なお、ノイズがなければ系は軌道方向に中立安定なので $\Lambda = 0$ となり、位相差は延びも縮みもしない。式 (4) より ϕ の線形化 Langevin 方程式は $\dot{\phi}(t) = \varepsilon Z'(\theta(t))\phi(t)\xi(t)$ となるので、 $\ln |\phi(t)|$ は

$$\frac{d}{dt} \ln |\phi(t)| = \varepsilon Z'(\theta(t))\xi(t)$$

に従う。この式をノイズに関して平均すればよいのだが、Stratonovich 解釈では右辺の $\theta(t)$ と $\xi(t)$ が独立ではないことに注意が必要である。ここでは Novikov の公式を使う [10]。ガウス型確率過程 $\xi(t)$ に駆動される $\theta(t)$ に対して

$$\langle Z'(\theta(t))\xi(t) \rangle = \int_0^t ds \langle \xi(t)\xi(s) \rangle \left\langle \frac{\delta Z'(\theta(t))}{\delta \xi(s)} \right\rangle$$

が成立する。汎関数微分の項は、式 (4) を形式的に積分した $\theta(t) = \theta(0) + \omega t + \varepsilon \int_0^t ds Z(\theta(s))\xi(s)$ より、 $s \leq t$ で

$$\frac{\delta Z'(\theta(t))}{\delta \xi(s)} = \frac{dZ'(\theta(t))}{d\theta(t)} \frac{\delta \theta(t)}{\delta \xi(s)} = \varepsilon Z''(\theta(t))Z(\theta(s))$$

と計算されるので、 $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = 2\delta(t-s)$ を使って、

$$\Lambda = \left\langle \frac{d}{dt} \ln |\phi(t)| \right\rangle = \varepsilon^2 \langle Z''(\theta(t))Z(\theta(t)) \rangle$$

が得られる。ノイズに関する平均は式 (4) で決まる θ の定常確率密度 $P(\theta)$ による平均に置き換えられるが、 ε が小さければ位相はリミットサイクル上にほぼ一様分布して $P(\theta) \simeq 1/2\pi$ となるので [9]、Lyapunov 指数 Λ は

$$\Lambda \simeq \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z''(\theta)Z(\theta)d\theta = -\frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{Z'(\theta)\}^2 d\theta \leq 0$$

と計算できる。第 2 式では部分積分して $Z(\theta)$ の周期性を用いた。等号成立は位相感受関数が恒等的に $Z'(\theta) = 0$ となる非物理的な場合だけで、通常の振動子では常に $\Lambda < 0$ となる。よって、結合

のない複数の振動子に弱い共通白色ガウスノイズを与えると、それらの位相差は平均的には縮小し、いずれ同期することが分かる。

以上の結果は時間相関を持つガウスノイズに一般化できる。また、式 (4) を伊藤型の確率微分方程式に変形して扱う事もできて、 Λ だけでなく位相差 ϕ の分布自体も得られる [11]。さらに、有限強度のランダムインパルス駆動の場合も位相縮約により解析できて、同期だけではなく脱同期が起きる場合があることも示されている [12]。FHN モデルと LED 点滅回路における共通ノイズによる同期現象の例を図 5 に示す。

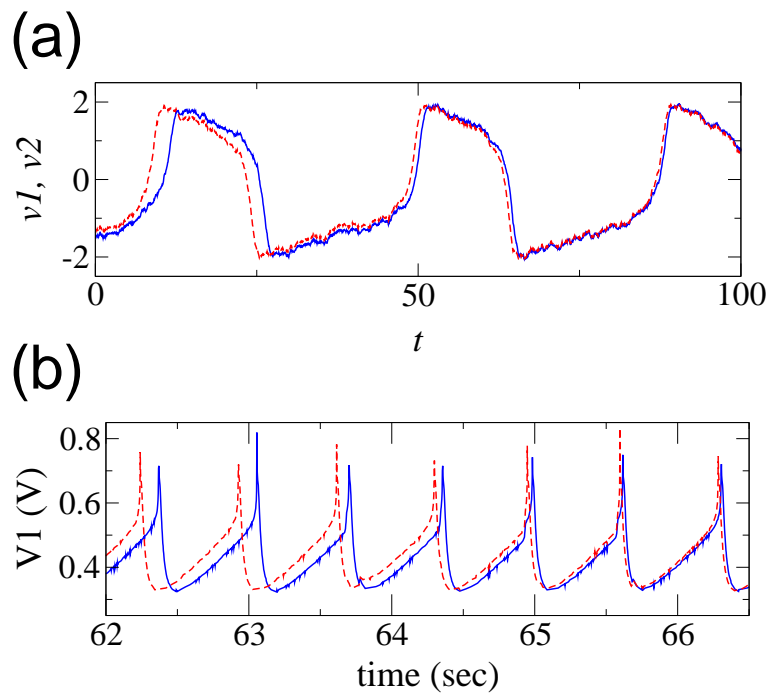


図 5 (a): 共通白色ガウスノイズを受けた FHN モデルの同期. 異なる初期条件から出発したふたつの軌道を表示. (b): 共通ランダムインパルスを受けた LED 点滅回路の同期. 実験ではひとつの回路に同一のランダムインパルス時系列を繰り返し与えて計測.

5 結合振動子系

位相縮約理論により弱く結合した振動子多体系を記述する位相モデルを導き、ふたつの振動子間の同期現象や多数の振動子からなる系の挙動について述べる。

5.1 位相縮約・平均化

性質の近い N 個のリミットサイクル $j = 1, \dots, N$ が小さな結合強度 ε で相互作用する系を考えよう:

$$\dot{\mathbf{X}}_j(t) = \mathbf{F}_j(\mathbf{X}_j) + \varepsilon \sum_{k=1}^N \mathbf{G}_{jk}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k).$$

$\mathbf{F}_j(\mathbf{X}_j)$ は振動子 j の固有ダイナミクス, $\mathbf{G}_{jk}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k)$ は振動子 k が j に及ぼす影響を表す. 振動子の性質のばらつきは ε と同程度に小さいとして, $\mathbf{F}_j(\mathbf{X}_j) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_j) + \varepsilon \mathbf{f}_j(\mathbf{X}_j)$ と書く. ここで \mathbf{F} はダイナミクスの共通部分で, $\varepsilon \mathbf{f}_j$ は個別のずれである.

この系を位相縮約する. 共通部分の力学系 $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ のリミットサイクルを $\mathbf{X}_0(t)$ として位相場 $\theta(\mathbf{X})$ を導入し, 位相感受関数を $\mathbf{Z}(\theta)$ とする. 振動子 j の位相を $\theta_j(t) = \theta(\mathbf{X}_j(t))$ と定義する. 式 (2) の導出と同様に, 振動子の状態 \mathbf{X}_j を対応する位相 θ_j を持つリミットサイクル上での状態 $\mathbf{X}_0(\theta_j)$ で近似することにより,

$$\dot{\theta}_j(t) \simeq \omega + \varepsilon \mathbf{Z}(\theta_j) \cdot \left[\mathbf{f}_j(\theta_j) + \sum_{k=1}^N \mathbf{G}_{jk}(\theta_j, \theta_k) \right] \quad (5)$$

という方程式が得られる. ここで $\mathbf{f}(\mathbf{X}_0(\theta_j)) = \mathbf{f}_j(\theta_j)$, $\mathbf{G}_{jk}(\mathbf{X}_0(\theta_j), \mathbf{X}_0(\theta_k)) = \mathbf{G}_{jk}(\theta_j, \theta_k)$ である.

さらに, 結合や不均一性の効果が十分に小さいとして, 平均化近似を行う. 各々の位相 $\{\theta_j\}$ から定常回転成分 ωt を引いた新しい位相 $\{\phi_j = \theta_j - \omega t\}$ を導入すると, 式 (5) は $\dot{\phi}_j(t) = \varepsilon \mathbf{Z}(\phi_j + \omega t) \cdot \left\{ \mathbf{f}_j(\phi_j + \omega t) + \sum_{k=1}^N \mathbf{G}_{jk}(\phi_j + \omega t, \phi_k + \omega t) \right\}$ となり, 右辺が $O(\varepsilon)$ なので, $\{\phi_j\}$ は遅い変数である. そこで, 上式を $\{\phi_j\}$ を時刻 t の値に固定してリミットサイクル一周について平均化した後でもとの位相 $\{\theta_j\}$ に戻せば, 簡潔な位相方程式

$$\dot{\theta}_j(t) = \omega_j + \varepsilon \sum_{k=1}^N \Gamma_{jk}(\theta_j - \theta_k) \quad (6)$$

が得られる. ここで $\omega_j = \omega + \varepsilon \Delta_j$ で,

$$\Delta_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{Z}(\psi) \cdot \mathbf{f}_j(\psi) d\psi$$

は振動子の性質のずれによる振動数の差である. また,

$$\Gamma_{jk}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{Z}(\varphi + \psi) \cdot \mathbf{G}_{jk}(\varphi + \psi, \psi) d\psi$$

は振動子 k から j への影響を表す 2π 周期的な位相結合関数 (phase coupling function) である. これが位相差 $\theta_j - \theta_k$ のみに依存することが, 以後の解析を非常に容易にする.

5.2 対称に結合したふたつの位相振動子系

まず, ふたつの性質の良く似た振動子 1 と 2 が対称な結合関数 G で相互作用しているモデルを考えよう:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_1(t) &= \mathbf{F}_1(\mathbf{X}_1) + \varepsilon \mathbf{G}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2), \\ \dot{\mathbf{X}}_2(t) &= \mathbf{F}_2(\mathbf{X}_2) + \varepsilon \mathbf{G}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1).\end{aligned}$$

式 (6) より平均化後の位相方程式は

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1(t) &= \omega_1 + \varepsilon \Gamma(\theta_1 - \theta_2), \\ \dot{\theta}_2(t) &= \omega_2 + \varepsilon \Gamma(\theta_2 - \theta_1)\end{aligned}$$

となり, 位相差 $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ を導入すると, φ は

$$\dot{\varphi}(t) = \varepsilon \{ \Delta + \Gamma_a(\varphi) \} \quad (7)$$

と, 式 (3) とほぼ同型の方程式に従い, 同様に理解できる. ここで, $\varepsilon \Delta = \omega_1 - \omega_2$ は振動数の差で, $\Gamma_a(\varphi) = \Gamma(\varphi) - \Gamma(-\varphi)$ は位相結合関数の反対称部分である.

$\Gamma(\varphi)$ の 2π 周期性より明らかに $\Gamma_a(0) = \Gamma_a(\pm\pi) = 0$ なので, $\omega_1 = \omega_2$ ($\Delta = 0$) ならば, 位相差 $\varphi = 0$ の同相 (in-phase) 同期解と位相差 $\varphi = \pm\pi$ の逆相 (anti-phase) 同期解が存在する. 同相解 $\varphi = 0$ の安定性は $\Gamma_a(\varphi)$ の原点での傾き $\Gamma'_a(0)$ で決まり, $\Gamma'_a(0) < 0$ であれば安定である (このとき attractive な結合と呼ばれる). $\Gamma_a(\varphi)$ の形状によっては他の固定点を持つ可能性もある. $\Delta \neq 0$ でも $\min \Gamma_a(\varphi) < -\Delta < \max \Gamma_a(\varphi)$ ならば式 (7) はやはり安定・不安定固定点のペアを持ち, 振動子の位相差 φ は安定固定点にロックされる. $|\Delta|$ が大きすぎると, 式 (7) は固定点を持たず, 位相差 φ は周期的に揺らぎつつドリフトを続ける.

最近の面白い研究の例として, 合原 [5] は水田で採取した 2 匹のアマガエルの鳴き声が逆相同期することを発見し, これを上記の位相モデルを用いて説明した.

5.3 大域結合位相振動子系

N 個の性質の良く似た振動子 $j = 1, \dots, N$ が, 他の全ての振動子と均等に相互作用するモデルを考えよう:

$$\dot{\mathbf{X}}_j(t) = \mathbf{F}_j(\mathbf{X}_j) + \varepsilon \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{X}_k).$$

これを位相縮約すると大域結合位相モデル $\dot{\theta}_j(t) = \omega_j + \varepsilon \sum_{k=1}^N \Gamma(\theta_j - \theta_k)/N$ が得られる. 特に位相結合関数を Fourier 級数の最低次で $\Gamma(\varphi) = -\sin \varphi$ と近似した

$$\dot{\theta}_j(t) = \omega_j - \varepsilon \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\theta_j - \theta_k)$$

は蔵本モデルと呼ばれ、 $\Gamma(\varphi) = -\sin(\varphi + \alpha)$ の場合には坂口-蔵本モデルなどと呼ばれる^{*3}。

これらのモデルは振動数 ω_j の分布に適当なものを選べば熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ で解析的に解ける [2, 3]。相互作用は振動子間で位相を揃えようとするが、 ω_j のばらつきはこれを妨げる。この競合により、結合強度 ε が臨界値 ε_c を超えると個々の振動子が同期し始め、マクロな集団振動状態に転移する (図 6(a))。この集団同期転移は蔵本転移とも呼ばれ、蛍の群れの集団発光などがその例とされてきたが、近年、電気化学振動子を用いた実験系で定量的に確認された [6]。また、21 世紀初頭に開通したロンドンのミレニアムブリッジで歩行者間の歩調の同期によって生じた大きな横揺れは、集団同期転移の存在を公衆の面前で実証した [7]。

振動子集団のマクロな同期の度合いは

$$R \exp(i\Theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp(i\theta_k) \quad (8)$$

で定義される秩序パラメータ (平均場とも呼ぶ) で定量化できて、 R は集団振動の振幅、 Θ は位相を与える。集団振動が生じていれば、振幅 R は $0 < R \leq 1$ の有限の値をとり、位相 Θ は集団振動数 Ω で $\Theta = \Omega t$ のように定常に増加する。集団振動が生じていなければ $R = 0$ である。蔵本モデルが解ける理由は、この R と Θ を使って

$$\dot{\theta}_j(t) = \omega_j - \varepsilon R \sin(\theta_j - \Theta) \quad (9)$$

と形式的に一体問題の形に書き換えられることによる。実際、 $\Theta = \Omega t$ を代入すれば、前に述べた周期外力に駆動された振動子と同じダイナミクスに従うことが分かる。

しかし、単なる外力に駆動される振動子と本質的に違うのは、振動子集団自体が平均場 R を作り出していることである。つまり、式 (9) の R に適当な値を与えれば各々の振動子のダイナミクスが決まるが、そこから式 (8) を通じて計算される $R^{(1)}$ が与えた R と一致しなくてはならない。このような self-consistency (自己無撞着性) の議論により、 R の従う方程式が $R = h(\varepsilon R)$ という形で導かれ、いくつかの振動数分布に関して、臨界結合強度 ε_c や R の ε 依存性が求められている [2, 3]。

5.4 複雑ネットワーク上の振動子系

最近の話題として、複雑ネットワーク上の結合振動子系を取り上げよう。近年 Barabási 達により、ネットワークの各ノードの次数 (他のノードとの結合本数) がベキ分布に従うスケールフリーネットワークが、インターネットから細胞内酵素反応系に至るまで、実世界の驚くほど普遍的な構造であることが明らかにされた [13, 14]。これにより、ネットワーク構造を持つ結合力学系の挙動に関心が高まり、ネットワーク上の結合振動子モデルが研究され始めている [14, 15, 16]。

^{*3} 通常のリミットサイクルでは最低次の Fourier 成分が dominant であることが多い。また、超臨界 Hopf 分岐点近傍でのリミットサイクルの標準形である Stuart-Landau 振動子の結合系では、 $\Gamma(\varphi)$ が厳密に $\sin(\varphi + \alpha)$ という形となることを示せる [2]。

N 個の振動子 $j = 1, \dots, N$ のネットワーク結合系を考えよう:

$$\dot{\mathbf{X}}_j(t) = \mathbf{F}_j(\mathbf{X}_j) + \varepsilon \sum_{k=1}^N A_{jk} \mathbf{G}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k).$$

ネットワークは $N \times N$ の隣接行列 A_{jk} で表され, 振動子 j と k に結合があれば $A_{jk} = 1$, なければ $A_{jk} = 0$ で, 結合は対称であるとする ($A_{jk} = A_{kj}$). 自分自身への結合は考えない ($A_{jj} = 0$). 平均化後の位相方程式は

$$\dot{\theta}_j(t) = \omega_j + \varepsilon \sum_{k=1}^N A_{jk} \Gamma(\theta_j - \theta_k)$$

となる. 以下, 位相結合関数が $\Gamma(\varphi) = -\sin(\varphi + \alpha)$ の場合を考える. これは (坂口-) 蔵本モデルをネットワーク上に拡張したものである.

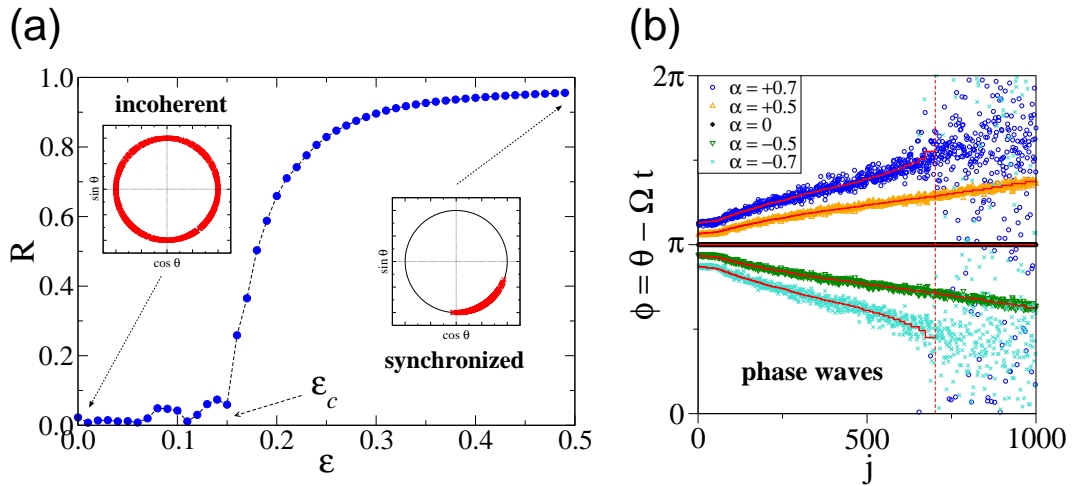


図 6 (a) 蔵本モデルの集団同期転移 ($N = 1000$). 結合強度 ε がある臨界値 ε_c を超えたところでマクロな同期が生じ, 秩序パラメータ R が急に増大する. 挿入図は非同期状態 (左) と同期状態 (右) での位相の分布. 個々の振動子の位相は非同期状態ではばらばらだが, 同期状態では互いに寄り集まっている. (b) スケールフリーネットワーク上の定常な位相波. 振動子は次数 n_i の大きい順に並べてある. 次数に依存して個々の振動子が平均場にロックされる位置が徐々にずれるため, 定常な位相勾配を持つように見える. 実線は自己無道着理論によるもの. 右端の次数の小さな振動子集団は, 平均場にロックされずドリフトし続けているため散らばっている.

このモデルはそのままでは解けないが, ネットワークを平均場近似すると蔵本モデルと同様な解析が可能となる. 振動子 j の感じる「局所場」を

$$R_j \exp(i\Theta_j) = \sum_{k=1}^N A_{jk} \exp(i\theta_k)$$

と定義すれば, 振動子 j のダイナミクスは

$$\dot{\theta}_j(t) = \omega_j - \varepsilon R_j \sin(\theta_j - \Theta_j + \alpha)$$

と書ける. ここで, ネットワークの詳細な構造を無視してしまい, 各ノードの次数 $n_j = \sum_{k=1}^N A_{jk}$ だけを残す平均場近似を行う. 次数の重みをつけた全系の「大域平均場」

$$R \exp(i\Theta) = \sum_{k=1}^N \frac{n_k}{n_{total}} \exp(i\theta_k), \quad n_{total} = \sum_{k=1}^N n_k$$

を導入して, 各振動子の感じる局所場 R_j, Θ_j を $R_j \simeq n_j R, \Theta_j \simeq \Theta$ と近似する. つまり, 各振動子は単にその結合の本数に比例した強さの局所場を感じるとする. これは径の小さい一様なランダムネットワークでは良い近似となっている [14, 15, 16]. これによって位相方程式は

$$\dot{\theta}_j(t) = \omega_j - \varepsilon n_j R \sin(\theta_j - \Theta + \alpha) \quad (j = 1, \dots, N)$$

と近似されるが, これは実効的な結合強度 εn_j がノードの次数 n_j に比例している点を除けば, 大域結合蔵本モデルの式 (9) に良く似ており, 同様に解析できる.

一宮 [15] はこのような平均場近似の下でスケールフリーネットワーク上の蔵本モデル ($\alpha = 0$) を self-consistent に解き, 次数分布のベキ指数によっては結合強度 ε が $\varepsilon \rightarrow +0$ となる極限でも集団同期転移が生じる事を示した. この結果は, スケールフリーネットワーク上の伝染病の伝播モデルにおいてはどんなに感染率が低くても病気が蔓延するという有名な結果 [13, 14] と類似しており, 興味深い. また, Ko-Ermentrout [16] は $\alpha \neq 0$ の場合を解析して, ネットワーク上の次数の大きな振動子から次数の小さな振動子の方向に (またはその逆方向に) 進むように見える定常な位相波が形成されることを示した (図 6(b)). これはネットワーク上に単なる完全同期ではない動的秩序が形成され得ることを示した結果で, 興味深い.

6 まとめ

非線形振動子の位相縮約理論を簡単に紹介した. スペースの都合で説明が不十分な箇所が多々あるので, 文献 [2, 3] や関連論文を参照して頂きたい. 特に注目すべきなのは, 位相縮約することにより, 各種の結果が個別の振動子の詳細によらない一般的なものとして得られたことである. 実際, 位相縮約には単なるダイナミクスの簡略化以上の意義がある. 実世界の振動現象には, そのメカニズムの詳細を知る事自体が困難なものも多い. 例えば, 生物細胞の振動現象に関係する遺伝子やタンパク質の組とそれらの相互作用の決定は, 非常に大きな挑戦だろう. しかし, 位相縮約理論に基づけば, リミットサイクル振動が生じてさえいれば, 位相応答関数を測定することにより, 系のミクロな詳細を切り離れたひとつ上の階層で, 外力への応答や結合させた場合の挙動に関する定量的な知見を得ることができる. さらに, 位相縮約することによって物質的背景の全く異なる振動子系から同一の位相モデルが得られ, 現象の背後の普遍的な数理メカニズムがあらわになることもある. このような意味で, 位相縮約理論は蔵本の言う「述語的不変性に基づく多様な世界の現象横断的な理解」 [17] をリズム現象に対して実践するための具体的な処方箋を与えている. 現在, 生命科学をはじめとする様々な分野でリズム現象に関する詳しい情報が得られ続けているが, それらを整理し理解するための簡潔で強力な枠組みとして, 今後も位相縮約理論の重要性が薄れることはないと思われる.

謝辞

この解説記事を書く機会を与えて頂いた小西啓治先生, かつての指導教官で現在でも折にふれ有用なアドバイスを頂いている蔵本由紀先生, 図とデータを提供して頂いた共同研究者の新井賢亮博士に感謝します.

参考文献

- [1] A. T. Winfree: *The Geometry of Biological Time*, Springer, 2001.
- [2] Y. Kuramoto: *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Dover, 2003.
- [3] 蔵本 由紀: リズム現象と位相ダイナミクス, *リズム現象の世界* (蔵本 由紀編), 東京大学出版会, 2005.
- [4] F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich: *Weakly Connected Neural Networks*, Springer, 1997.
- [5] 合原一究: アマガエルの合唱に潜む非線形ダイナミクス, *科学* (岩波書店) **78**, 1267 (2008).
- [6] I. Z. Kiss, Y. Zhai, and J. L. Hudson: Emerging Coherence in a Population of Chemical Oscillators, *Science* **296**, 1676 (2002).
- [7] S. H. Strogatz *et al.*: Crowd synchrony on the Millennium Bridge, *Nature* **438**, 43 (2005).
- [8] T. McGeer: Passive Dynamic Walking, *Int. J. Robot. Res.* **9**, 62 (1990).
- [9] J. Teramae and D. Tanaka: Robustness of the Noise-Induced Phase Synchronization in a General Class of Limit Cycle Oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 204103 (2004).
- [10] W. Horsthemke and R. Lefever: *Noise-Induced Transitions*, Springer, 1983.
- [11] H. Nakao, K. Arai, and Y. Kawamura: Noise-induced synchronization and clustering in ensembles of uncoupled limit-cycle oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 184101 (2007).
- [12] K. Arai and H. Nakao: Phase coherence in an ensemble of uncoupled limit-cycle oscillators receiving common Poisson impulses, *Phys. Rev. E* **77**, 036218 (2008).
- [13] R. Albert and A. -L. Barabási: Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
- [14] S. Boccaletti *et al.*: Complex networks: Structure and dynamics, *Phys. Rep.* **424**, 175 (2006).
- [15] T. Ichinomiya: Frequency synchronization in a random oscillator network, *Phys. Rev. E* **70**, 026116 (2004).
- [16] T. -W. Ko, and G. Bard Ermentrout: Partially locked states in coupled oscillators due to inhomogeneous coupling, *Phys. Rev. E* **78**, 016203 (2008).
- [17] 蔵本 由紀: *新しい自然学—非線形科学の可能性*, 岩波書店, 2003.